INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL DE MINAS GERAIS
Campus Inconfidentes

VALQUIRIA ROSÁRIA PERES BONAMICHE

OS MOSAICOS DE ESCHER E O ENSINO DE GEOMETRIA

INCONFIDENTES – MG

2017

VALQUIRIA ROSÁRIA PERES BONAMICHE

OS MOSAICOS DE ESCHER E O ENSINO DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do título de Graduação em Licenciatura em Matemáticapelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – *Campus* Inconfidentes.

Orientador: Prof. Me. João Paulo Rezende

INCONFIDENTES – MG

2017

VALQUIRIA ROSÁRIA PERES BONAMICHE

OS MOSAICOS DE ESCHER E O ENSINO DE GEOMETRIA

Data de aprovação: 19 de Outubro de 2017

____

Orientador: Professor Me. João Paulo Rezende
(IFSULDEMINAS, campus Inconfidentes)

____

Membro 1: Professor Dr. Antonio do Nascimento Gomes
(IFSULDEMINAS, campus Inconfidentes)

____

Membro 2: Professora Priscila Aparecida Coutinho

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angustia.

À minha avó Rosa (*In Memoriam*) que com muito carinho e apoio, não mediu esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

A Nossa Senhora nossa mãe e protetora que me guiou e iluminou minha mente para que conseguisse.

À avó Rosa (*In Memóriam*), com todo meu amor e gratidão, por tudo que fez por mim ao logo de minha vida. Desejo poder ter sido merecedora de seu esforço dedicado em todos os aspectos, especialmente quanto a minha formação. Ao meu filho Felipe, que embora não tivesse ciência disto, iluminou de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos.

Ao meu marido Leonardo pela companhia nos momentos difíceis, pelo auxílio nos momentos decisivos e pelo incentivo de coragem em mais uma etapa concluída.

A minha mãe Cássia e ao meu padrasto Laerte pelo apoio, na medida do possível, em todas as minhas realizações.

Aos meus irmãos Maria Clara e João Vitor, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

A minha sogra Nilvanda por ter rezado tanto para que eu conseguisse.

Ao meu primo Alan e amigo Leonardo, que mesmo atarefados com seus estudos, dedicaram horas de seu dia a me ajudar.

A minha cunhada Giovana que por diversas vezes cuidou do meu filho como se fosse seu para que eu pudesse concluir os estudos.

A minha amiga e companheira e hoje professora Priscila, desde o curso de graduação pelo aprendizado compartilhado. É um prazer tê-la na banca examinadora.

Ao meu orientador Prof. João Paulo pelo auxílio com competência, sabedoria e paciência, alicerces fundamentais para esta jornada.

Ao Professor Dr. Antonio do Nascimento Gomes pela honra de aceitar participar da banca.

A todos os professores que atuam na Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS pela contribuição para realização deste trabalho.

A este Instituto, seu corpo docente, direção e administração pela oportunidade de fazer o curso.

E a todos que contribuem para a mudança social, política e cultural, acreditando na melhoria da qualidade de ensino em nosso país.

"Minhas idéias são baseadas na minha reverência e admiração pelas leis contidas no mundo que nos rodeia. Quem maravilha-se com alguma coisa, percebe algo maravilhoso".

M. C. Escher

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar uma possível forma de se organizar o ensino de alguns conceitos geométricos explorando os mosaicos produzidos pelo artista holandês Maurits Cornelis Escher. A pesquisa de revisão bibliográfica procura, através dos estudos sobre o ensino de geometria, apresentar o contexto histórico do ensino de geometria no Brasil, um pouco da vida e obra de Escher, enfatizando os conteúdos matemáticos presentes em sues mosaicos e mostrar uma possível forma de se utilizar as referidas obras para o ensino de geometria. Espera-se que o estudo possa contribuir com os professores de matemática que busquem alternativas para fazerem suas aulas mais significativas e atrativas para os estudantes, valorizando os conceitos e estimulando a criatividade.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Ensino de Geometria, Mosaicos, Escher.

ABSTRACT

The actual project has been developed with the objective of to present a possible form of organizing the instruction of some geometrics notions exploring the mosaics produced by the Dutch artist Maurits Cornelis Escher. The bibliographic review thought the studies about the geometric education introduce the historic education in Brazil, a little bit of the live and the work about Escher emphasizing the mathematicians' contents in yours mosaics and show a possible form to utilizing the referred literary work to geometric teach. It's expected to this study can contributed with the math teachers search for some alternatives to can make your class more attractive and significant to the students, valuing the concepts stimulating the creativity.

KEY-WORDS: Mathematics Education, Geometry Teathing, Mosaics, Escher.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CESEC	Centro Estadual de Educação Continuada
GEEM	Grupo de Estudos do Ensino de Matemática
IFSULDEMINAS	Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Sul de Minas Gerais
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação e Cultura
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROEJA	Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica

INTRODUÇÃO

"Somente aqueles que tentam o absurdo terão o impossível".
M.C. Escher

O ensino não deve ser apenas uma transmissão de conhecimento ou conteúdos prontos, em que o aluno memorize fórmulas e as reproduza sem nenhuma reflexão. Deve sim ser uma ação conjunta entre professor e discente, que por meio de reflexões e debates encontrem a melhor forma para uma real compreensão do conteúdo a ser ensinado.

A partir deste pressuposto, acredito[1] que o ensino possa tomar outros rumos, que não a simples transmissão de conteúdos do professor – sábio – ao aluno – ignorante. Partindo de minha formação acadêmica, em que recebi um ensino puramente mecanizado, não desejo aos outros, o que me foi prejudicial.

Minha vida escolar teve início no ano de 1995, na pré-escola. Concluio Ensino Fundamental I[2] no ano de 1999. Nesta fase sempre obtive notas boas, era uma das melhores alunas, tive sorte de ter tido excelentes professoras, que ensinavam os conteúdos utilizando métodos diferenciados e com atividades lúdicas. Isso favoreciao meu aprendizado e dos meus colegas de classe.

No ano de 2000 dei início ao Ensino Fundamental II. Essa mudança, não foi apenas de ciclo, mas de escola, da divisão dos conteúdos por professores, dos hábitos escolares etc.

---

[1] A introdução é escrita em 1ª pessoa por se tratar de um formato em memorial, que conta a trajetória acadêmica da autora, não podendo, por esse motivo, utilizar a impessoalidade.
[2] Ensino Fundamental I: de 1º à 4º série, Ensino Fundamental II: de 5º a 8º série, definidos pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação do ano de 1996, com duração de 8 anos. Atualmente o Ensino Fundamental é composto por 9 anos estabelecido pela lei n° 11.274/2006, sendo que a citada primeira série corresponde ao 2º ano do sistema atual.

Tudo era novidade. Percebi que os docentes não utilizavam formas de ensino diferenciadas. Eles passavam os conteúdos na lousa, os alunos copiavam, decoravam e reproduziam nas avaliações. Este tipo de ensino não me agradava. Comecei a não mais compreender osconteúdos, principalmente a matemática e meu rendimento caiu muito, mesmo assim consegui concluir a quinta e sexta séries. Quando comecei a sétima série, era uma adolescente rebelde e não queria saber de estudar, desisti por duas vezes e somente concluí esta etapa em 2004.

No ano seguinte dei início à oitava série, em que foi mais difícil ainda, pois descobri, logo no começo do ano letivo, que estava grávida. Com muita dificuldade, concluí essa etapa. Pensei muitas vezes em desistir, já não tinha tempo de estudar, não compreendia os conteúdos, sempre ensinados da mesma forma mecanizada e tinha que cuidar de meu filho que nasceu em setembro daquele mesmo ano.

Em 2006 comecei o primeiro ano do ensino médio e as dificuldades com os conteúdos se agravaram. Além disso, minha avó estava com problemas no coração, o pai do meu filho trabalhava e minha mãe morava em outra cidade. Não tendo com quem deixar meu filho, tive que interromper novamente os estudos.

No ano seguinte optei em cursar o ensino médio no Centro Estadual de Educação Continuada (CESEC)[3], por ser um ensino mais flexível. Os educandos estudavam os conteúdos em casa e iam à escola somente para tirar dúvidas e realizar as avaliações. Mas, apressar a formação tinha um preço: a precarização do aprendizado. Mesmo com o ensino mais rápido, tive que parar devido aos mesmos problemas anteriores.

Em 2008 comecei o Proeja[4] integrado ao Técnico em Administração no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS), Campus Inconfidentes. Meu filho já estava maior e minha cunhada ajudava minha avó cuidar dele. Na época eu não trabalhava, mas as dificuldades na aprendizagem continuavam e me deparei novamente com a mesma forma de ensino mecanizado que não me favorecia. Isso me desanimava muito e quase desisti novamente, mas, por incentivo da minha avó, continuei. O sonho dela era me ver formada.

[3] O CESEC é uma escola de educação de jovens e adultos mantida pelo Governo do Estado de Minas Gerais, com certificado válido em todo o território nacional.
[4] Programa Nacional de Integração da Educação Básica com a Educação Profissional na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos, uma iniciativa do Governo Federal que oferece cursos profissionalizantes simultaneamente aos ensinos fundamental e médio, destinados aos jovens e adultos que não tiveram a oportunidade de cursar o ensino básico na chamada idade regular.

Dessa forma, concluí o ensino médio no ano de 2010, no final deste mesmo ano passei no vestibular e, em 2011, iniciei o curso de Licenciatura em Matemática no IFSULDEMINAS, campus Inconfidentes.

Em contato com as disciplinas da graduação, principalmente na parte pedagógica, minhas reflexões sobre a forma de ensino mecanizado foram se intensificando, uma vez que tínhamos informações e orientações para a busca de novos métodos de ensino.

Em 2013 consegui ingressar como professora em uma escola de minha cidade, cobrindo licença de uma professora que tirou férias prêmio. Na atuação docente sempre busquei formas diferenciadas de ensinar meus alunos. De início eles estranhavam, pois estavam acostumados com a mesma forma tradicional de ver os conteúdos, mas com o tempo eles passaram a gostar bastante de minha forma de trabalhar. Diziam que estavam compreendendo melhor a matéria e muitos passavam a gostar mais de Matemática, pois suas notas estavam melhorando. Fiquei muito satisfeita com o trabalho que desenvolvi.

No ano de 2014 minha avó faleceu, pensei em abandonar o curso, estava com muitas matérias atrasadas, mas o pai de meu filho me incentivou a continuar.

Em 2015 não consegui aulas, mas continuei trabalhando no comércio e em meio a uma jornada cansativa, estou agora, prestes a concluir a graduação.

As minhas experiências me levam a crer que o ensino tradicional não prioriza o “dar sentido” aos conceitos matemáticos, pois está mais interessado em treinar os estudantes para que memorizem fórmulas e algoritmos. Ao lecionar buscando explorar o sentido dos conceitos matemáticos, tive um bom retorno dos meus alunos. Sendo assim, penso ser de extrema importância buscar sempre a renovação da prática docente.

Partindo deste pressuposto, iniciei este estudo a fim de apresentar uma das possíveis formas de se pensar em um ensino de Matemática que valorize mais o conceito e menos a técnica. Trata-se de um estudo sobre o ensino de conteúdos geométricos por meio dos mosaicos de Escher. Escolhi a geometria por considerar que se trata do conteúdo matemático que mais perde o sentido na forma de ensino mecanizada.

As obras de Escher são permeadas de conteúdos matemáticos e permitem uma exploração reflexiva, crítica e uma melhor percepção dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Para tal feito, optei pela metodologia de pesquisa qualitativa bibliográfica, com embasamento em trabalhos desenvolvidos sobre o assunto entre os anos de 1989 a 2015. Em um primeiro momento, fiz o levantamento da bibliografia referente ao tema, em bibliotecas e na internet. Busquei artigos, livros, dissertações e teses que atendessem aos objetivos do trabalho. Em seguida, iniciei a leitura e triagem dos textos mais pertinentes para a escrita da monografia.

O presente trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro capítulo apresenta-se o contexto histórico do ensino de geometria no Brasil, com o intuito de compreender como se constituiu e como suas consequências se refletem no ensino do conteúdo até os dias atuais, iniciando assim a reflexão sobre o assunto.

Por sua vez, no segundo capítulo, é apresentado o artista Maurits Cornelis Escher, um pouco de suas obras e alguns conceitos geométricos presentes em seus mosaicos, com o objetivo de explicitar como estes trabalhos podem ser utilizados dentro das salas de aula e como podem tornar o ensino dos conteúdos matemáticos mais significativos e dinâmicos.

Para finalizar o estudo, no terceiro capítulo é apresentado um plano de aula para ilustrar uma possível forma de se utilizar os mosaicos de Escher para o ensino de conceitos geométricos e também como uma possibilidade para uma aula que valorize os conhecimentos dos alunos e estimule sua criatividade.

CAPÍTULO I – CONTEXTO HISTÓRICO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

"Nós adoramos o caos porque amamos produzir a ordem".
M. C. Escher

A geometria é um ramo da Matemática destinado ao estudo das formas, planas e espaciais, com as suas propriedades (RIOS, 2001, p. 299). Nesse sentido o ensino e aprendizagem desta ciência é de suma importância para o desenvolvimento do pensar geométrico, do raciocínio visual, dentre outras habilidades, como afirma Lorenzato (1995, p. 5)

> (...) para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Lorenzato(2005) ainda afirma que as pesquisas psicológicas apontam para a importância do ensino de geometria para criançasde forma significativa, em que este auxilia no desenvolvimento da percepção espacial, tanto em matemática, quanto na leitura e escrita.

Nesta mesma perspectiva, Mocrosky, Mondini e Estephan (2012, p.1), apoiados em outros autores que estudam o ensino de geometria, defendem que

> Vários são os motivos que levam a comunidade de educadores e a sociedade em geral avalorizar os conhecimentos advindos da geometria: sua presença está na forma dosobjetos, nas edificações da construção civil, nas necessidades de desenvolvermos

> senso de localização, direção, sentido e na possibilidade que ela nos oferece para a resolução de problemas nas mais diversas áreas. De um modo geral ela é formativa, pois capacitam o ser humano para a tarefa de interpretar e compreender o mundo. Além disso, favorece o processo de abstração e generalização das relações percebidas ao estarmos no mundo, contribuindo para a articulação entre o intuitivo e o formal, abrangendo os aspectos históricos trazidos pela atividade exclusivamente geométrica à abertura aos meios algébricos.

Diante de tais considerações, entende-se que a Geometria tem um papel fundamental no ensino da Matemática na escola, porém, seu ensino vem sendo abandonado ou feito de forma mecânica, sem sentido aos alunos, perdendo, dessa forma, sua essência, seu fundamento, como veremos a frente. Partindo desse princípio, o presente capítulo é dedicado a realizar um breve rememoro do contexto histórico do ensino de geometria no Brasil, do início do século XX até os dias atuais. Dessa forma, busca-se compreender melhor como o ensino de geometria tem se configurado ao longo dos anos.

1.1 - O ENSINO DE MATEMÁTICA NO INÍCIO DO SÉCULO XX

No início do Século XX a educação era privilégio para as classes mais favorecidas, que podiam pagar para garantir o ensino aos seus filhos. As classes mais humildes, que representavam a maioria da população, sofriam com o descaso das autoridades e apresentavam altos índices de analfabetismo, chegando a cerca de 63% da população (PAVANELO, 1989). Não havia um sistema público de educação.

Nesse período, a matemática era dividia em três ramos ensinados separadamente: a geometria, a álgebra e a aritmética. No Brasil, não existiam livros didáticos de matemática, o material utilizado no ensino era advindo de traduções de livros de autores franceses, onde os estudos sobre os conteúdos matemáticos apresentavam constantes avanços.

No início da década de 1920, já se percebia uma maior urbanização da população no Brasil, em consequência do crescimento da indústria, que, por sua vez, exigia cada vez mais mão-de-obra qualificada. Por esse motivo os movimentos sociais e intelectuais da época, solicitavam aos governantes um novo sistema de ensino que atendesse a classe trabalhadora.

Aos poucos foram criadas novas escolas públicas pelo país, porém de forma precária. Somente foi oficializado um plano nacional de educação com a aprovação da constituição de 1934.

Paralelamente a estes acontecimentos no Brasil, ocorre na Europa uma grande mudança em relação às concepções que se tinham, por parte de professores/pesquisadores, acerca do ensino de matemática. Um dos nomes mais famosos foi o de Felix Klein, que liderou um movimento internacional cujas pretensões eram fazer com que as escolas de formação inicial já preparassem os estudantes para uma “matemática moderna” – mais relacionada às ciências naturais como a física de Newton e menos relacionada à matemática clássica euclidiana – e minimizasse assim, o descompasso entre a formação básica e a superior. Esse movimento trouxe várias indicações de como deveria ser o ensino de matemática, dentre elas, a ideia de unificação entre álgebra, geometria e aritmética, que passariam a ser chamadas de matemática. Não demorou muito, essas ideias chegaram ao Brasil:

> (...)na década de trinta, chegou ao Brasil as ideias de Félix Klein (1849-1925)de um método de modernização do ensino de Matemática. Partindo da intuição, esse matemático trabalhava com aplicações e desenvolvia conteúdos elaborados matematicamente, evidenciando, por exemplo, noções de cálculo diferencial e integral por meio de conteúdos simples, como o estudo de funções. O desenvolvimento das aulas, conforme proposto por ele, deveria ter por partida ideias matemáticas simples possíveis e exemplos conhecidos pelos alunos. Prezava pelo tratamento rigoroso da matemática de modo a trabalhar na matemática elementar conceitos avançados. Com esse novo método, o ensino de matemática focou em uma nova *lógica* pautada na didática da matemática. Devido às ideias de integração de Félix Klein a álgebra, a aritmética e a geometria, que eram tratadas separadamente, são integradas e denominadas matemática (MOCROSKY, MONDINI e ESTEPHAN, 2012, p.7**)**

No Brasil destaca-se o professor Euclides Roxo, que atuava como docente no Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Em 1929, sob a influência das ideias de Klein, publica o livro “Curso de Matemática Elementar”. Roxo também implantou a nova forma de ensino no Colégio.

> Euclides Roxo, então professor catedrático do colégio Pedro II do Rio de Janeiro – escola que ditava as diretrizes para o ensino secundário no Brasil – seria o maior defensor das propostas do movimento reformador do ensino da matemática que teve sua origem na Alemanha e na Inglaterra no final do século XIX e que foi, segundo Felix Klein, “ motivado pela mudança da tendência geral da cultura em nossa época, a qual é, no fim das contas, a origem geral de renovação educacional (escola nova)” (ROXO, 1937, p. 56, apud MIORIM, MIGUEL e FIORENTINI, 1993, p. 23).

No ano de 1931 é instituída a Reforma Francisco Campos, que estruturou e centralizou o ensino ao âmbito federal, os cursos superiores, secundário e o ensino médio profissionalizante.

Com a reforma, as ideias de Roxo foram expandidas no ensino em âmbito nacional, que a partir de então passa a compor o currículo a nova disciplina matemática, que tinha como um dos objetivos o ensino da álgebra, geometria e aritmética de forma integrada e não mais isoladas como anteriormente.

Muitas eram as expectativas em relação ao novo conteúdo matemático, porém não se obteve muito êxito. O principal motivo seria o despreparo dos professores que não tinham uma formação específica para o ensino da nova disciplina e continuavam ensinando os três ramos da matemática de forma isolada, representando assim uma frustração às expectativas criadas em relação à nova forma de ensino instituída pela reforma.

Somente alguns anos depois surgiram fatores que contribuíram para que a matemática começasse a ser pensada tal como propunha a reforma Francisco Campos:

> O primeiro deles é a criação das Universidades de São Paulo e do Rio de Janeiro, em 1934 e 1935 respectivamente, pois nelas se instalaram os primeiros cursos destinados a formação de professores das diversas disciplinas do ensino secundário. O outro é a organização imposta por Francisco Campos a esse ensino. Além de dividir o curso em dois ciclos – o fundamental (de cinco anos de duração) e o complementar de (de 2 anos) – estabelece, também, os programas referentes as diferentes disciplinas e oferece "instruções pedagógicas" (PAVANELLO, 1993, p.10)

Referindo-se ao ensino de geometria a reforma propõe que ele se inicie pelas explorações intuitivas, em seguida se estabelecerão os conhecimentos indispensáveis à construção de uma sistematização, partindo para uma exposição formal (PAVANELLO, 1993).

Não se pode dizer se tais práticas foram aplicadas nas salas de aula, uma vez que os livros didáticos que passaram a ser adotados apresentavam os conteúdos separadamente, tendo o professor que ensinar cada um dos três em cada série, representando, mais uma vez, um fracasso na tentativa do ensino da matemática.

No ano de 1942 é realizada uma nova reforma no ensino, agora chamada de Reforma Gustavo Capanema, que propunha uma expansão no ensino profissionalizante e reformulação do ensino secundário, que passa a ter o primeiro ciclo composto por 4 anos de duração e o segundo em 3 anos.

Em relação ao ensino de matemática também foram propostas algumas novidades, como aponta Pavanello (1993, p. 11).

> Os programas de matemática de 1942 apresentam algumas diferenças em relação aos de 1931. Não mais se insiste em que os três assuntos (aritmética, álgebra e geometria) sejam abordados em cada uma das séries do curso ginasial. A geometria, no entanto, é abordada nas quatro séries, intuitivamente nas séries iniciais e dedutivamente nas últimas. Ela é também bastante priorizada no segundo ciclo, constando da programação de todas as séries. Inclui-se ainda trigonometria no 2º ano e geometria analítica no 3º.

Percebe-se, portanto, nesse novo contexto, uma maior valorização do ensino da geometria em relação aos outros dois assuntos, álgebra e aritmética, representando um avanço considerável na história do ensino da geometria no Brasil. Porém o programa foi bastante criticado pelo excesso de conteúdos, o que tornou o ensino meramente formal (PAVANELLO, 1993).

Na década de 1950 ocorre um grande aumento na industrialização no país, como consequência, uma grande demanda por mão-de-obra mais qualificada, por esse motivo as matrículas nas escolas aumentam substancialmente, causando um caos na educação. Por falta de estrutura e professores, muitas discussões sobre o ensino ganham destaque nas preocupações dos governantes, pela exigência da população pela abertura por mais vagas, bem como da qualidade da educação oferecida.

Além dessa situação, em 1960, surge um movimento de renovação do ensino de matemática influenciado pelo contexto político e econômico vivenciado nos Estados Unidos da América e que ganhou adeptos em outros países, como o Brasil, por exemplo. Esse movimento, conhecido como Movimento da Matemática Moderna, embora proposto com o *slogan* de que modernizaria e melhoraria a qualidade do ensino, acabou agravando ainda mais a situação.

1.2 - O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL

Após a Segunda Guerra Mundial (1945), a matemática ganhou novo destaque no mundo. Os estudos matemáticos se intensificaram durante a década de 1950, no auge da guerra Fria, período em que os Estados Unidos e a União Soviética[5] travavam um conflito indireto de ordem política, armamentista, econômica, militar, ideológica, e principalmente tecnológica (AZEVEDO; SERIACOPI. 2009).

A União Soviética, no ano de 1957, sai na frente na corrida tecnológica com o lançamento do satélite Sputnik. Os Estados Unidos, para recuperar a derrota do ocorrido, intensifica os investimentos em estudos matemáticos para o auxílio no desenvolvimento tecnológico do país. Com isto o ensino de matemática nas escolas também sofre as influências das novas descobertas, surgindo um novo movimento de estudos da disciplina que fica conhecido como os modernistas.

Assim o movimento surge como uma proposta de reforma para o ensino da Matemática que priorizava a unificação da Matemática por meio da teoria dos conjuntos e do

[5] Foi um estado socialista, formado pela união de várias repúblicas soviéticas, governada pelo Partido Comunista. Localizada na Eurásia, existiu entre 1922 e 1991.

estudo das suas estruturas fundamentais (COUSIN, 2011), se espalhando pelo mundo e influenciando o currículo escolar por toda parte.

No Brasil, o professor de matemática e autor de livros didáticos, Osvaldo Sangiorgi, após estagiar em escolas dos Estados Unidos que aderiram à modernização do ensino de matemática, no ano de 1960, consolida sua posição a favor do movimento e, segundo Valente (2008, p. 598),

> De volta ao Brasil, Sangiorgi logo começa a promover articulações entre professores da Universidade de São Paulo, professores efetivos de matemática da rede oficial de ensino, a mídia e a Secretaria de Educação do estado de São Paulo, com vistas à modificação dos programas de matemática, à semelhança do que vê nos Estados Unidos. O jornal "Folha de São Paulo", no dia 11 de outubro de 1960, noticia: "Professores de São Paulo visam à reforma dos programas e métodos do ensino de matemática. " No texto, a informação de que a Secretaria da Educação, em seu plano de reestruturação geral, cria um grupo de trabalho para estudo do ensino de matemática, coordenado pelo professor Osvaldo Sangiorgi.

Dessa forma, com apoio da imprensa e de alguns professores de matemática, sob o comando de Sangiorgi, criam o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), com foco no ensino da matemática moderna aos professores da cidade de São Paulo e do interior (COUSIN, 2011), intensificando a busca para implantação do ensino da modernização da disciplina e, assim, gradualmente, após vários encontros e congressos pelo país sobre o assunto, a novidade foi sendo implantada na rede de ensino, principalmente por meio dos livros didáticos escritos por Sangiorgi e seus seguidores.

Após uma pesquisa realizada em artigos, teses e estudos mais aprofundados sobre as mudanças ocorridas com a implantação da nova metodologia, Miorim, Miguel e Fiorentini (1993, p. 21), diagnosticam as principais mudanças ocorridas no ensino da matemática escolar brasileira, durante a implantação da matemática moderna e apontam que:

> 1º a álgebra passa a ocupar um lugar de destaque, sobretudo em sua concepção modernista, tornando-se o elemento unificador e construtor do novo edifício matemático;
> 2º os conjuntos numéricos e suas propriedades estruturais passam a ser a base da aritmética e da álgebra escolares;
> 3º há uma tentativa de superar o caráter pragmático, mecânico e não-justificado do ensino da álgebra, substituindo-o por uma abordagem que enfatiza a precisão da linguagem matemática, o rigor e a justificação das transformações algébricas através das propriedades estruturais;
> 4º a tentativa de substituir a abordagem preponderantemente euclidiana clássica da geometria por outra mais atualizada e rigorosa fracassa e, como consequência, o seu ensino – quando não abandonado – passa a assumir uma abordagem eclética.

Percebe-se, contudo, que o ensino de geometria perde seu espaço no novo cenário educacional da matemática e ocorrem várias mudanças em relação a esse ramo nos livros didáticos, como aponta Pavanello (1993, p. 13):

> Quanto à geometria, opta-se, num primeiro momento, por acentuar nesses livros as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem "intuitiva" que se concretiza, nos livros didáticos, com utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas. Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas.

O novo modo de ensino trouxe consigo muitas contradições para as aulas de matemática. Se de início a intenção era unificar efetivamente os três ramos da matemática, álgebra, geometria e aritmética, acaba por causar uma lacuna entre eles, uma vez que os professores não estavam preparados para tais mudanças, tampouco compreendiam os conteúdos dos livros didáticos devido à complexidade em que eram apresentados, o que causou muitas críticas a modernização da matemática.

> Os próprios professores sentiam, a partir de sua experiência em sala de aula, que os alunos estavam confusos com a linguagem dos conjuntos, o rendimento dos estudantes não havia melhorado, e os pais estavam igualmente insatisfeitos. A imprensa já não dava tanta atenção ao movimento e nos artigos divulgados podiam ser encontradas críticas a respeito dos exageros da Matemática Moderna (SOARES, 2001, p. 116)

Em relação ao ensino da geometria a situação se agrava, uma vez que acaba sendo deixada em segundo plano pelos professores, ocasionando consequências até nos dias atuais.

> O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A propostada Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje (LORENZATO, 1995, p. 4).

No ano de 1971 foi aprovada a nova Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus, que vem agravar ainda mais a situação do ensino da Matemática Moderna, em especial, o ensino de geometria. A nova lei determina que cada professor deve montar seu próprio currículo de acordo com as necessidades dos discentes, dessa forma o ensino da geometria é deixado de lado, uma vez que os docentes passam a trabalhar somente a aritmética e a noção de conjunto (PAVANELLO, 1993).

Além disso, a lei, mal formulada, abre espaço para diferentes interpretações e sofre várias distorções em sua aplicação

> As distorções de interpretação e a má aplicação da Lei 5692/71, fez com que o ensino da Matemática nada melhorasse, muito pelo contrário, acentuou a confusão, com a interação das matérias de Ciências: Matemática e Ciências Físicas e Biológicas, fazendo com que professores não licenciados no curso de Matemática, pudesse ministrá-la, especialmente no ensino de 1º grau (MARTINS, 1984, p. 209 apud SOARES, 2001, p. 120).

Por estes e outros motivos o Movimento da Matemática Moderna deixou suas marcas no ensino da matemática no Brasil, que na tentativa de melhorar o mesmo, acaba por torná-lo algo ainda mais complexo e odiado pelos discentes. Principalmente no que se refere ao ensino de geometria

> Assim, o MMM não apenas não conseguiu dar conta da crise em que se encontrava o ensino da matemática como, segundo alguns educadores matemáticos, contribuiu ainda mais para seu agravamento. As críticas e a busca de novas alternativas começaram a surgir a partir da segunda metade da década de 70. Uma dessas críticas – talvez a mais contundente – diz respeito ao abandono do ensino da geometria. Ocorre, então, por parte dos educadores matemáticos, um esforço no sentido de recuperar o ensino da geometria. Isso, entretanto, não significou um retorno à sua abordagem euclidiana clássica (MIORIM, MIGUEL E FIORENTINI, 1993, p. 21).

Dessa forma, o movimento foi perdendo seu espaço na educação, tanto no Brasil, como no mundo todo. Até mesmo muitos de seus defensores acabaram por criticar o caminho pelo qual o ensino foi conduzido. Não se sabe ao certo qual foi o ano do fim do Movimento da Matemática Moderna, apenas que no início da década de 1970 que as críticas se acentuaram (SOARES, 2001), e assim a modernização da matemática perdeu gradualmente seu significado e deixou de ser adotada pelos sistemas educacionais.

Com o fim do movimento, o ensino da matemática, em particular da geometria, foi perdendo seu significado, sendo abandonado cada vez mais pelos professores. Cada Estado ficou incumbido de criar seus currículos próprios, conforme a necessidade de cada região. Assim o ensino de geometria teve um grande retrocesso neste período, em que professores que tiveram uma má formação, sem uma aprendizagem adequada do conteúdo, não tiveram preparo suficiente para também ensinar a geometria, tornando-se uma ‘reação em cadeia’, que se reflete na educação até os dias atuais.

1.3 - DA DÉCADA DE 1990 AOS DIAS ATUAIS

Desde o ano de 1988, em que foi aprovada a nova Constituição da República Federativa do Brasil, a educação era discutida para a reformulação da Lei de Diretrizes e Bases do ensino, estagnada desde 1971. As discussões e debates se arrastaram por oito anos, enquanto o sistema educacional brasileiro penava com o descaso dos governantes. O ensino de matemática em particular, perdia cada vez mais seu sentido, vigorando a abordagem mecânica (PIASESKI, 2010).

Enfim, no ano de 1996, é aprovada a LDB 9394/96, que trouxe consigo uma nova ordem ao sistema educacional. Porém, novidade mesmo, para o ensino de matemática, veio um ano depois com o estabelecimento, pelo Ministério da Educação (MEC), dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), com o objetivo de orientar as Políticas Públicas e as práticas escolares do ensino básico no país.

> No final do século passado, o MEC elabora os Parâmetros Curriculares Nacionais que têm como finalidade orientar as políticas públicas e as práticas escolares do ensino básico brasileiro. Este documento vem ao encontro dos professores para suporte e discussão de aspectos do cotidiano de suas práticas pedagógicas, onde abrange desde a reflexão sobre os objetivos do ensino fundamental, passando por orientações relativas aos conteúdos a serem ministrados, chegando até critérios de avaliação (PIASESKI, 2010, p. 22).

Os PCNs trazem novas direções a respeito do ensino da matemática. A geometria, em particular, também tem seu espaço reconhecido. As orientações a respeito do ensino de geometria são denominadas de ‘Espaço e Forma’. É enfatizada a importância do ensino da geometria para a formação crítica dos alunos; ainda se orienta um ensino conduzido de forma que sejam privilegiados desde representações intuitivas dos conceitos até uma maior compreensão dos conteúdos. Preconiza-se também, que o aprendizado em matemática auxilie no entendimento de outras disciplinas.

Porém, na prática, não houve avanços significativos em relação ao ensino de geometria. Pesquisas realizadas, desde então, apontam para a defasagem de desempenho dos alunos em relação ao conteúdo em questão.

Pirola (2000), Passos (2000), Kopke (2006), Veronese (2009), Cardoso (2012), Santos e Nunes (2014), Santos e TolentinoNeto (2015), trazem alguns exemplos de pesquisas realizadas em escolas sobre o desempenho dos alunos em geometria e todos apontam para o mesmo problema de falta de conhecimento em relação ao conteúdo.

Para Lorenzato (1995) um dos principais motivos para o abandono do ensino de geometria nas escolas seria o despreparo dos professores em relação ao conteúdo. Passos (2000) também aponta o mesmo motivo após pesquisa realizada com docentes, assim como Veronese (2009) e Gonçalves e Lando (2012). Pirola (2000) detecta a dificuldade de aprendizagem nos conceitos básicos de geometria já em alunos de Licenciatura em Matemática.

Pereira (2001, p.58), após análise de trabalhos realizados a respeito do tema concluiu que: “em síntese, pode-se perceber, nas pesquisas, que o professor aceita a importância da demonstração no ensino de Geometria, mas admite não saber como executar; remetendo, pois, o problema a reflexões metodológicas neste ensino”.

Ainda para Pereira (2001, p.64) a falta de conhecimento dos professores nos conteúdos geométricos é uma herança do Movimento da Matemática Moderna que “não conseguiu superar a crise em que se encontrava o ensino da Geometria, mas contribuiu para seu abandono”. Aliada a esta hipótese, Kopke (2006) aponta que os professores não obtiveram uma formação adequada, em relação a geometria, desde o ensino básico, refletem a deficiência de aprendizagem em seus alunos devido à falta de conhecimento dos docentes.

Clemente *et al* (2015), após pesquisa documental a partir de artigos publicados em periódicos na área de educação matemática, evidencia um crescente aumento no número de trabalhos publicados sobre essa temática e ainda conclui que a maioria deles apresentam estratégias diferenciadas de ensino para a geometria.

Contudo, entende-se que o ensino de geometria no Brasil passou por várias mudanças ao longo dos anos e, mesmo assim, ainda é evidenciado o baixo desempenho dos alunos em relação ao aprendizado desse conteúdo. Ao que tudo indica, ainda há muito trabalho para que o modo tradicional, mecânico e axiomático, possa ser substituído ou complementado por metodologias que priorizem o dar sentido aos conceitos estudados.

Assim, os próximos capítulos foram construídos com o intuito de apresentar uma possibilidade de ensino de alguns conteúdos geométricos de forma mais significativa, atrativa e interessante aos alunos e, dessa maneira, contribuir com as pesquisas atuais. Para isso, propõe-se o uso dos mosaicos de Escher como uma estratégia para se ensinar e aprender geometria.

CAPÍTULO II – A GEOMETRIA PRESENTE NOS MOSAICOS DE ESCHER

"Muitas vezes me sinto mais perto dos matemáticos
do que dos meus colegas artistas".
M.C. Escher

Conforme visto no capítulo anterior, a geometria vem sendo ensinada com pouco ou sem nenhum sentido aos alunos, em que aprendem basicamente a memorizar fórmulas e conteúdos de modo que não são efetivamente compreendidos. Ao buscar modos de ensinar a geometria de maneira mais atraente, uma forma que pode favorecer seu ensino é por meio de trabalhos em arte. Nessa busca a autora deste trabalho se deparou com um artista muito famoso por sua obra genial que envolve muitos conceitos de geometria.

Dessa forma, o presente capítulo pretende apresentar um pouco da vida e da obra de Escher, enfatizando a utilização da mesma para contribuir com o ensino de geometria. Primeiramente é apresentada a biografia do artista e um pouco de suas obras mais famosas. Em seguida, apresenta-se uma breve explanação sobre a geometria presente em mosaicos formados por figuras regulares que cobrem o plano. Para finalizar, apresentam-se alguns conceitos geométricos presentes nos mosaicos de Escher e a forma como o artista manipula os mosaicos regulares para criar suas figuras.

2.1 - QUEM FOI ESCHER

No dia 17 de junho de 1898 nascia na cidade de Leeuwarden, Holanda, aquele que viria a ser um dos maiores gênios da arte moderna, Maurits Cornelis Escher, pertencente a uma família da alta burguesia holandesa. Seu pai era engenheiro hidráulico, contribuiu para canalização de rios e construção de portos no Japão, foi nomeado engenheiro-chefe da Companhia de Águas do governo Holandês. Na escola, o pequeno Escher não obteve muito êxito, reprovou por duas vezes, não apresentava notas boas, principalmente em matemática, destacando-se apenas nas aulas de desenho (TJABBES, 2010).

Sob a influência do pai, que acreditava que o filho deveria seguir carreira na área das exatas, foi matriculado na escola de Arquitetura e Artes Decorativas. “Porém, em pouco tempo, verificou-se que ele não tinha nenhuma inclinação nem talento para a área de arquitetura, e o futuro artista migrou para a área de Artes Decorativas” (BERRO, 2008).

Nesta escola conheceu o professor Samuel Jesserun de Mesquita, que lhe ensinou várias técnicas de desenho e gravura artística. Contudo, não se destacava como aluno, foi considerado um discente com pouca criatividade. Escher permaneceu nesta instituição até o ano 1922, quando concluiu o curso.

A partir de então, saiu em viagem pela França e chegou à Itália, onde se apaixonou por Jetta Umiker, casando-se com ela no ano de 1924 e tiveram dois filhos. O casal permanecera na Itália até o ano de 1935, até que o estado de saúde do filho mais novo os obrigou a mudar para Suíça. Em 1941 residiram na Bélgica e depois de algum tempo, regressaram para a Holanda, tendo viajado algumas vezes para Espanha.

As paisagens dos lugares em que Escher morara influenciaram seu processo criativo, buscando formas para demonstrar sua admiração pelos diferentes relevos, como aponta Tjabbes (2010, p.21):

> A paisagem holandesa é plana, regular e claramente dividida. Quem se cria na planície logo aprende a estimar quanto tempo leva para ir de A a B. Tempo e espaço compartilham uma unidade, ancorada nesta terra do horizonte distante. A paisagem italiana é muito diferente: rústica e cheia de montanhas. A distância até um local mais baixo frequentemente parece menor do que é. Chegar ao destino toma muito mais tempo do que imagina um holandês. É uma experiência surpreendente: nas montanhas, tempo e espaço se amplificam. Como compartilhar essa experiência, como mostrá-la aos outros?
>
> Escher é um observador cuidadoso, e no começo ele faz o que lhe ensinou sua formação artística, elaborando numerosos desenhos durante suas peregrinações. Mais tarde ele os usará como referência para suas gravuras. Mas as xilogravuras e litografias do período italiano inicial não exibem a realidade fotograficamente. Elas revelam a visão escheriana, o que ele sentia diante de determinada cena: a essência do local.

A partir de então, o artista passa a produzir obras utilizando as técnicas de xilografia[6] e litografia[7] aprendidas no curso de Artes Decorativas, impressionando cada vez mais com suas expressões e utilizando procedimentos ousados para representar o impossível, metamorfoses, infinito, ilusões de ótica, empregando conceitos de geometria e matemática, como afirma Carnelos (2010, p.1)

> Maurits Cornelis **Escher** (1898-1972) foi um artista holandês, autor de várias obras de estilo bem peculiar, representou o impossível, o infinito e metamorfoses através de efeitos de ilusão de ótica, sem burlar as regras geométricas do desenho e da perspectiva. Suas obras são na maioria xilogravuras, litografias e meios-tons. Foram estas técnicas que permitiram que suas obras atingissem a estética impecável que podemos observar. Ele também foi o artista que melhor utilizou conceitos avançados de matemática e geometria para embasar suas obras. Ele mesmo uma vez declarou sua proximidade com a matemática: "Embora não tenha qualquer formação e conhecimento das ciências exatas, sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão".

A produção artística de Escher passou a impressionar os admiradores de arte da época pela complexidade e representação da realidade de suas obras. A partir de então ele recebeu encomendas para diversas finalidades

> Depois que a sua obra ficou mais conhecida surgiram algumas encomendas para decorar artefatos como: capas de revistas, papéis de embrulhos, caixas de bombons, ou uma de suas encomendas mais importantes: esboços para selos. Além disso, Escher recebeu do governo da Holanda a incumbência de fazer desenhos para as novas notas de dinheiro do banco holandês, que nunca chegaram a ser usadas, por haver divergências entre os traços dos seus desenhos e as especificações técnicas necessárias para evitar falsificações (BERRO, 2008, p. 30).

Os matemáticos também vieram a admirar as obras de Escher, pela utilização de uma harmonia única dos desenhos mais abstratos, acatando postulados da matemática com perfeição, sem que o próprio artista tivesse conhecimento da matemática presente em seus trabalhos.

O artista trocou várias correspondências com o matemático Bruno Ernst, que admirava a forma com que Escher utilizava os conceitos da matemática em suas obras. Ernst passou a realizar estudos matemáticos utilizando as obras do artista, publicando no ano de 1978 o livro "O Espelho Mágico de M. C. Escher", em que identificou quatro principais fases das obras do pintor. Sendo elas:

---

[6] Uma técnica em que o artesão utiliza um pedaço de madeira para entalhar um desenho, deixando em relevo a parte que se pretende fazer a reprodução.
[7] Um processo de reprodução que consiste em imprimir sobre papel, por meio de prensa, um escrito ou um desenho executado com tinta graxenta sobre uma superfície calcária ou uma placa metálica.

- Primeira fase: de 1922 a 1937, o tema central dos trabalhos foram as representações em gravuras das paisagens de cidades da Itália.

Figura 1: SamGimignano, 1922 – xilogravura

Fonte: <http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>

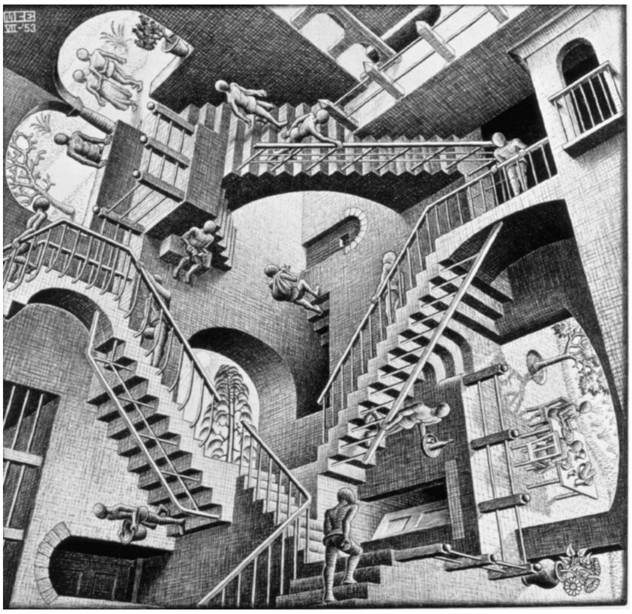
- Segunda fase: de 1937 a 1945, o artista trabalha com figuras bidimensionais e tridimensionais, simetrias, encaixes perfeitos de formas.

Figura 2: Répteis, 1943 - litografia

Fonte: <http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>

- Terceira fase: de 1946 a 1956, esse período é caracterizado pelo uso de gravuras subordinadas a perspectiva, podendo ser observadas de vários pontos de vista diferentes, também passa a utilizar a representação de sólidos geométricos

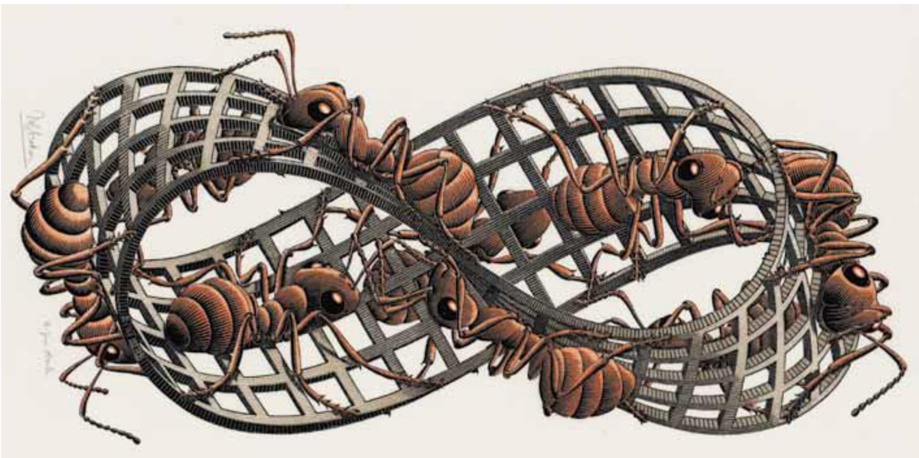
Figura 3: Relatividade, 1953 - litografia



Fonte: <http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>

- Quarta fase: de 1956 a 1970, neste momento Escher usa como tema central a aproximação do infinito, continuando também com algumas produções de figuras impossíveis.

Figura 4: Fita de Moebius II (formigas), 1963 - xilogravura



Fonte: <http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>

Conforme aponta Berro (2008), até o ano de 1969, Escherainda produzia obras perfeitas, mesmo com idade avançada, continuou com a mesma sensibilidade para retratar suas ideias mais criativas. No ano de 1970 se mudou para uma pequena cidade ao norte da Holanda, onde veio a falecer no dia 27 de março de 1972, deixando um grandioso acervo produzido ao longo dos anos citados, com a utilização de diferentes técnicas e perspectivas, vários temas e momentos, proporcionando explorações de conteúdos matemáticos na maioria de suas produções artísticas, porém para a continuidade do presente trabalho, optou-se por aprofundar os estudos em seusgeniais mosaicos.

2.2 - OS MOSAICOS

Segundo Nikolova (2010), os mosaicos aparecem na história da humanidade em várias civilizações antigas, sendo encontrados na cobertura de tetos, paredes e pisos de templos, casas, palácios, apresentando várias formas e simetrias.

O mais antigo mosaico existente foi feito pelos Sumerianos (antiga mesopotâmia), na área hoje conhecida como Iraque. Era constituída de arranjos de estacas coloridas de argila que eram prensadas dentro da superfície de paredes.

Figura 5: Mosaico Antigo

Fonte: <http://blogillustratus.blogspot.com.br/2010/03/mosaico.html>

No Brasil um dos mais recentes Mosaicos localiza-se no Santuário de Aparecida-SP, O Mosaico da Cúpula é de autoria do artista sacro Cláudio Pastro e retrata a chegada dos peregrinos à Aparecida.

Figura 6: Vista Geral da Cúpula

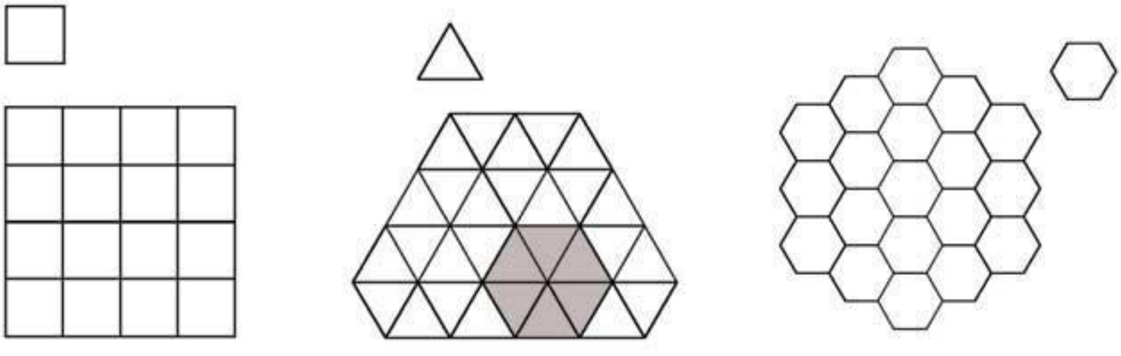
Fonte: <https://brasildelonge.com/2017/10/18/basilica-de-aparecida/>

A palavra mosaico é possivelmente advinda do grego ‘mousaikón’, que significa ‘obra das musas’, pois os gregos achavam uma técnica muito bonita, por isso inspiradas nas musas. A arte do mosaico na realidade é definida como o ajuntamento de pequenos elementos, as tesselas, que podem ser de variados matérias e formas, reunidos por um ligante, dessa forma revestindo o plano sem sobreposição e sem que existam espaços vazios entre elas (MOSAICO, 2017).

As peças que podem compor o revestimento do plano podem ter muitos formatos, para o presente trabalho será restringido apenas aos mosaicos formados somente por polígonos regulares.

Existem somente três polígonos regulares com os quais se podem formar mosaicos no plano sem sobreposição de peças ou espaços vazios. São eles: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.

Figura 7: Mosaicos regulares



Fonte:<http://www.fec.unicamp.br/~laforma/tupan/novaversao/criacao.html>

Berro (2008), destaca que os árabes tinham muitos conhecimentos matemáticos e desenvolveram grandes arquiteturas por meio dos mosaicos de figuras regulares, que recobriam paredes, tetos e pisos dos palácios. No século XIII os árabes ocuparam a Espanha, deixando naquele país várias construções de palácios com o citado ornamento em suas paredes. Foi em uma destas construções, o palácio mourisco de Alhambra, situado na cidade de Granada na Espanha, que Escher tomou conhecimento da técnica dos mosaicos regulares que cobrem o plano sem sobreposição e sem espaços vazios entre eles. O artista passou a copiar obsessivamente os ornamentos das paredes do palácio, descobrindo os segredos da divisão regular do plano.

Além de reproduzir os desenhos geométricos dos árabes, o artista tomou conhecimento de transformações matemáticas que aquele povo usava em seus ornamentos e conseguiu aprimorá-las e aplicá-las em várias de suas criações, como enfatiza Berro (2008, p. 27)

> Ao copiá-los, Escher acabou descobrindo os movimentos empregados para que o ornamento cubra-se a si mesmo: a translação, a rotação, a reflexão e a translação refletida, transformações que os matemáticos chamam hoje de isometrias, pois têm a propriedade de preservar a distância entre pontos. Alguns padrões permitem apenas um desses movimentos como simetria, outros, uma combinação de dois ou mais deles. Existem, ao todo, 17 grupos diferentes de combinações isométricas, que deixam um determinado ornamento invariante. Escher conseguiu chegar neles pelo estudo sistemático e pela experimentação.

O novo procedimento artístico aprendido representou um grande marco nas obras de Escher, que adveio a fazer obras incríveis utilizando as isometrias, translação, rotação e reflexão. Esses conceitos serão explicados com mais detalhes a diante. O pintor não ficando somente na representação dos polígonos regulares para formar os mosaicos, passou a utilizá-los apenas como base e a fazer combinações de elementos da natureza, principalmente animais. Ele usava de rotações, translações e reflexões, fazendo encaixes perfeitos e dando origem a obras geniais e surpreendentes. Foram inúmeros os trabalhos realizados com esta técnica, que ficaram conhecidos como “Mosaicos de Escher”.

Esses mosaicos marcaram a segunda fase das obras do artista holandês, como visto anteriormente, segue algumas criações com as mais variadas combinações de figuras produzidas a partir de figuras regulares.

Figura 8: Mosaicos de Escher

Fonte:http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/

Diante de tais obras, percebe-se uma rica fonte de conhecimentos matemáticos, principalmente no que se refere à geometria, portanto,identifica-se, nessas obras de arte, uma potencialidade didática em relação à geometria. Acredita-se que a inserção desses elementos nas aulas de matemática pode torna-las mais interessante, estimulante, criativa e atraente aos alunos.Identifica-se também a possibilidade de uma abordagem interdisciplinar entre artes e matemática.

2.3 - A GEOMETRIA NOS MOSAICOS

Seria uma ousadia para o momento tentar apresentar todos os tópicos de geometria possíveis de se explorar nos mosaicos construídos por Escher, sendo assim, pretende-se demonstrar um pouco das isometrias e as possibilidades de exploração das figuras geométricas, com seus ângulos internos e externos.

Segundo Barth (2006, p. 79) Escher não era muito didático em seu trabalho, ou seja, as obras por si só não apresentam conceitos geométricos prontos, identificáveis em um breve olhar, mas sim com uma apreciação mais aprofundada. Isso se dá devido à complexidade das transformações dos mosaicos realizadas pelo artista

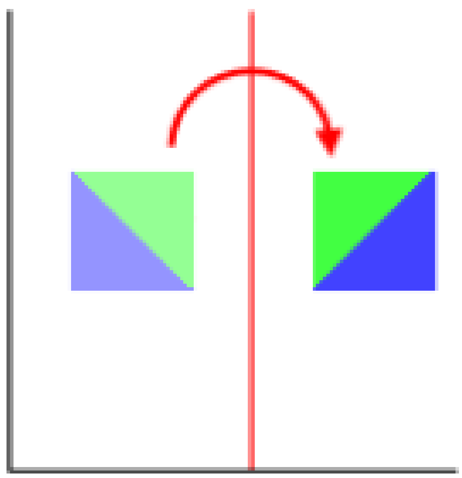
> Escher não é didático em seu trabalho, mas possibilita o entendimento de conteúdos do desenho geométrico segundo o seu próprio interesse. Como apontou Rohde (1997), as figuras em Escher preenchem espaços numa superfície, são transformadas, são deformadas para dar a ver as mais sutis surpresas ali manifestadas.

A técnica utilizada por Escher para transformar um mosaico regular em um mosaico com figuras, na verdade é um tópico de geometria chamado de isometria, que consiste em uma transformação geométrica, em que os segmentos e os ângulos da figura transformada mantem-se idênticos aos da figura original, porém são alterados a direção, o sentido e a distância.

A isometria é dividida em três tipos de simetrias: a reflexão, a translação e a rotação, em que cada um deles é realizado um modo de transformação diferente, sendo eles:

- A reflexão: na simetria por reflexão o objeto ou figura é refletido em relação ao eixo de simetria, como ocorre com um espelho, em que é possível fazer uma correspondência ponto a ponto com a figura original, como se pode observar na **Figura9**.

Figura 9: Reflexão por uma reta como eixo de simetria



Fonte:<http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/>

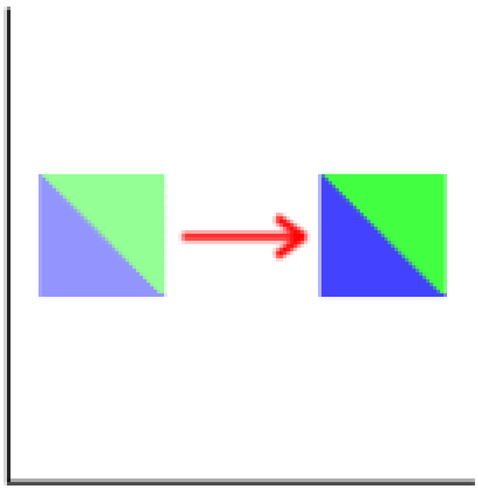
Neste mosaico de Escher, “Anjos-Demônios”, observa-se a simetria das imagens por reflexão, em que as imagens aparentam estar em frente a um espelho, mantendo a mesma distância do eixo, considerando que exista uma linha reta entre as imagens.

Figura 10: Anjos-Demônios, 1941 – tinta da Índia, lápis colorido, tinta branca

Fonte: < http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/>

- A Translação: na simetria por translação todos os pontos doobjeto se transladam no mesmo sentido, direção e distância, como se pode observar na **Figura11**.

Figura 11: Translação de um quadrado



Fonte:<http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/>

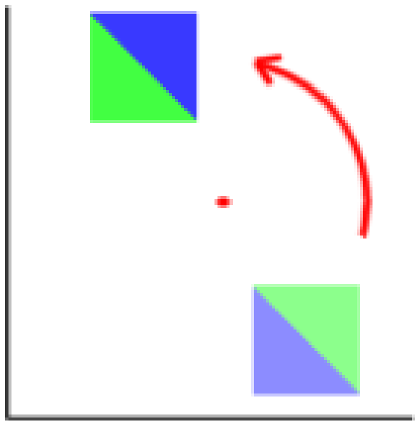
Na obra ‘Libélula’, Escher utiliza a translação, pois observa-se que as figuras não são refletidas e nem giradas, sendo que a mesma é transladada em um mesmo sentido e direção mantendo-se a mesma distância umas das outras.

Figura 12: Libélula, 1941 – lápis, tinta, aquarela

Fonte: <http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/>

- A Rotação: na simetria por rotação ocorre quando um objeto ou figura é girado em relação a um ponto fixo e independentemente da posição se mantém como no formato original.

Figura 13: Rotação por um ponto fixo



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/>

Figura 14: Lagarto / Peixe / Bastão, 1952 Tinta, lápis, aquarela

Fonte: <http://www.mcescher.com/gllery/symmetry/>

No mosaico acima, percebe-se a existência de vários pontos centrais, em que as imagens são rotacionadas em torno deles, formando uma ideia de movimento circular no mosaico.

Escher também utilizava de combinações de duas ou mais destes tipos de simetrias para construir seus mosaicos. Na obra ‘Lagartos’, por exemplo, pode-se perceber um caso de reflexão seguida de translação.

Figura 15: Lagarto,1942 - tinta da Índia, tinta de ouro, lápis colorido, pintura de cartaz

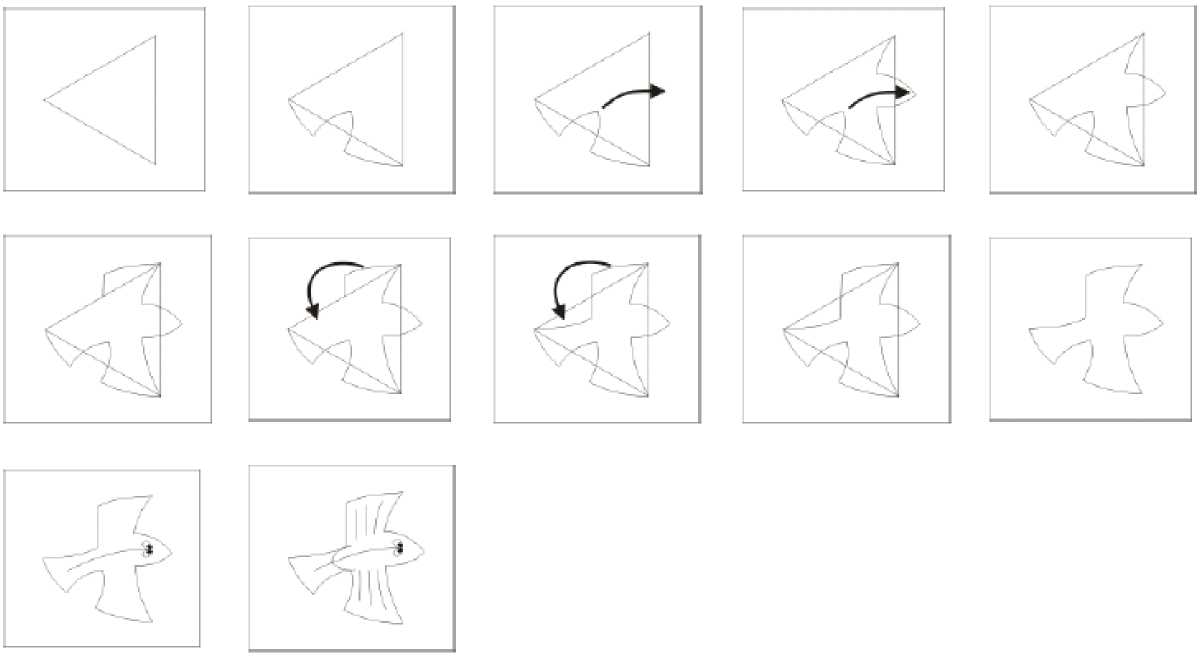
Fonte:<http://www.mcescher.com/gllery/symmetry/>

Além das posições das figuras é possível identificar muitos outros conceitos de geometria na transformação dos polígonos regulares nas próprias figuras utilizadas para formar os mosaicos. Nestas transformações Escher abusa de sua criatividade, variando triângulos regulares em peixes, quadrados em borboletas, hexágonos regulares em lagartos, a partir de recortes e remontagens dos elementos transformando os polígonos em desenhos com mesma área.

> Também há Matemática na divisão regular da superfície usada por Escher para criar suasfamosas séries de metamorfoses, onde formas geométricas abstratas ganham vida e vão, aos poucos, se transformando em aves, peixes, répteis e até seres humanos. Esta precisão muito característica da Matemática deixou os críticos de arte sem saber como realmente classificar a obra deste artista, que foi ganhando a admiração de matemáticos, físicos, cristalógrafos entre outros profissionais (BERRO, 2008, p. 29).

Na **Figura 16**, pode-se observar como Escher realiza os recortes e a remontagem das partes. As mesmas formas que são retiradas da parte interior do polígono são colocadas na parte dos encaixes que ficam na parte exterior mantendo assim a mesma área do triângulo original, transformando, por meio desta técnica, um triângulo equilátero em um peixe.

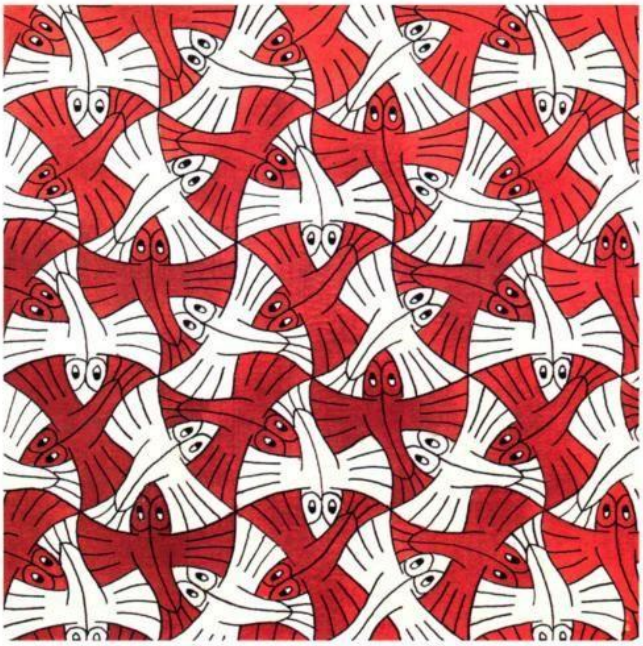
Figura 16: Transformação do triângulo equilátero em peixe



Fonte: <http://simetrica.esy.es/soumatematica/conceitos-e-curiosidades/biografia-escher/>

Em seguida o artista remonta as figuras construindo o mosaico, que se encaixam perfeitamente, pois foram criadas a partir do triângulo equilátero que é uma figura regular que cobre o plano sem sobreposição.

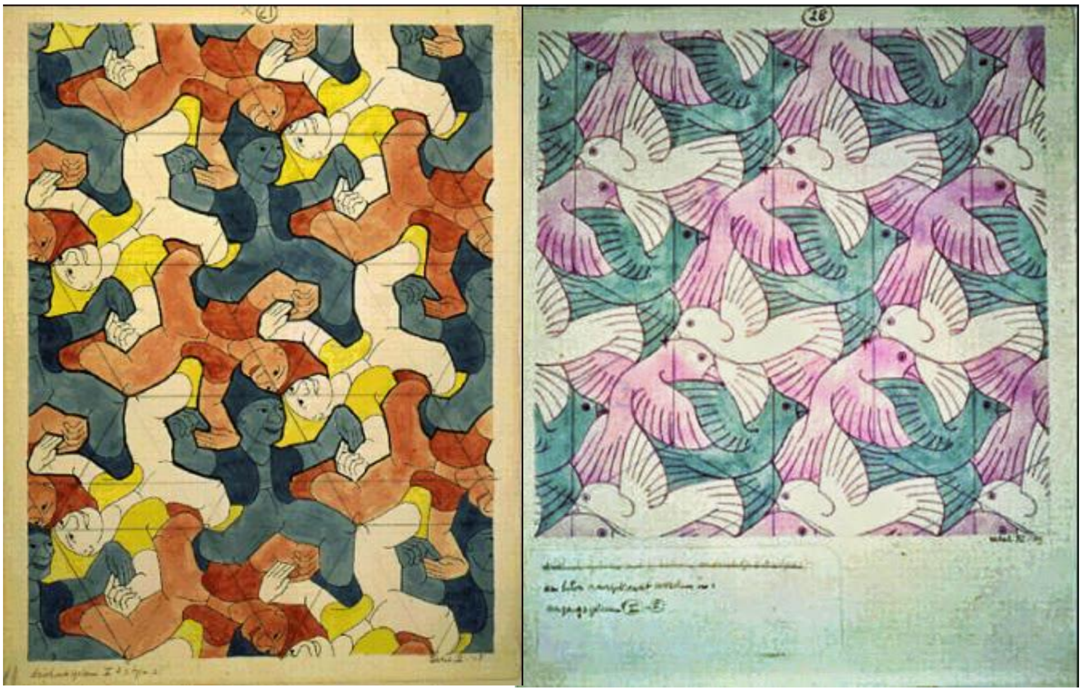
Figura 17: Peixe Voador



Fonte: <http://gsp2559.blogspot.com.br/2016/06/blog-post.html>

Na **Figura 18** também podem ser observadas figuras criadas a partir do triângulo equilátero.

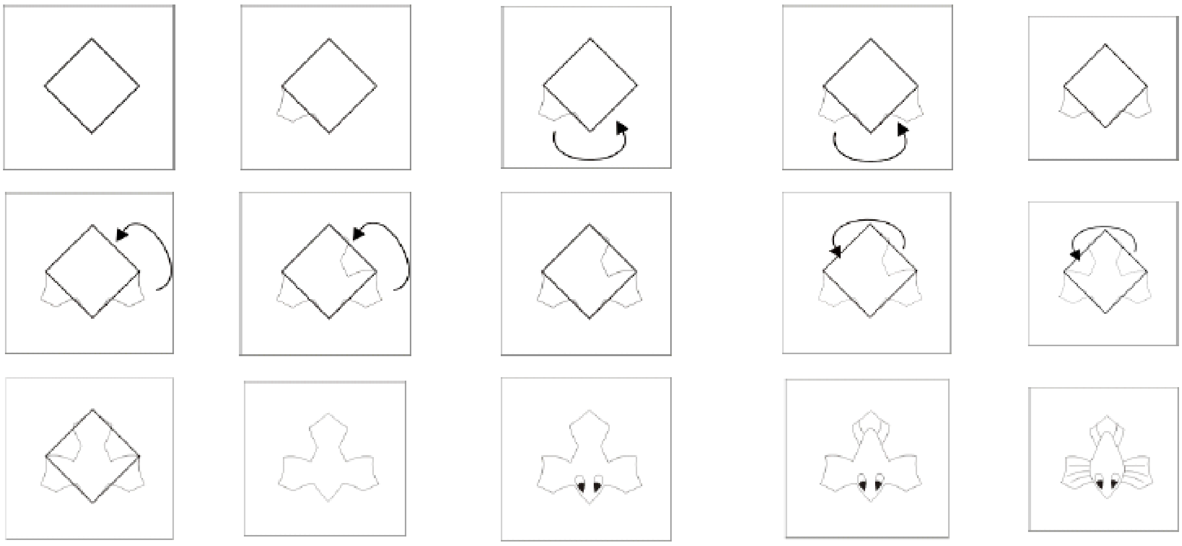
Figura 18: Palhaços, 1938 – lápis, tinta, aquarela; Três Pássaros, 1941 – lápis,aquarela



Fonte:<http://www.mcescher.com/gllery/symmetry/>

O quadrado também foi transformado por Escher em vários animais. Na **Figura 19** está descrito como ele converteu o polígono em um peixe.

Figura 19: Transformação do quadrado em peixe



Fonte:<http://simetrica.esy.es/soumatematica/conceitos-e-curiosidades/biografia-escher/>

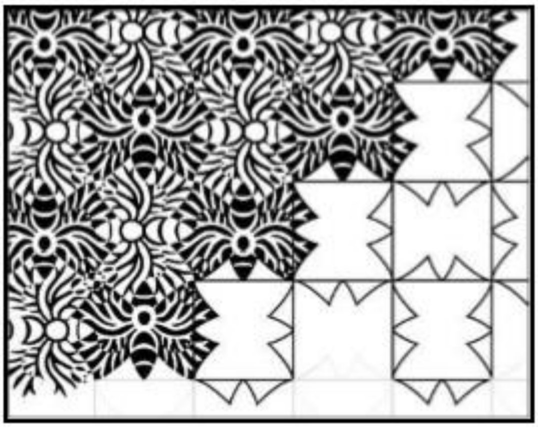
E da mesma forma, o artista encaixa o novo objeto formado, utilizando peças de cores distintas, neste caso três, para tornar o trabalho ainda mais instigante.

Figura 20: Dois Peixes, 1942 – tinta, aquarela

Fonte:<http://www.mcescher.com/gllery/symmetry/>

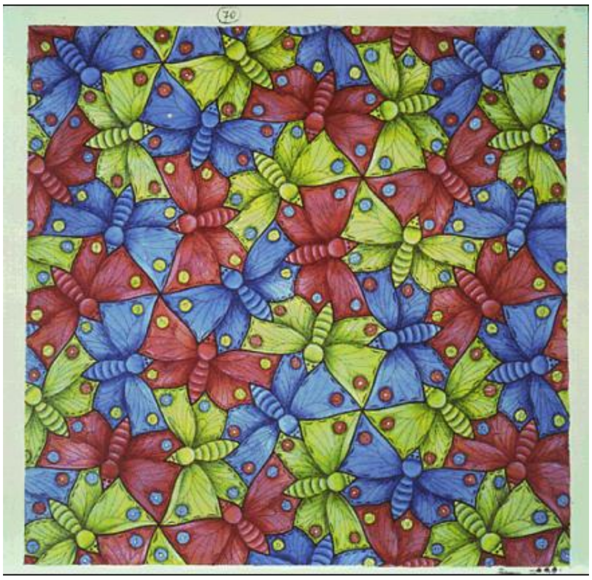
Nesta outra obra, **Figura 21**, o quadrado foi convertido em borboletas e as cores também utilizadas para aprimorar os traços da criação.

Figura 21: Transformação do quadrado em borboleta



Fonte: <http://www.matematicaviva.pt/2013/10/a-arte-matematica-de-escher.htm>

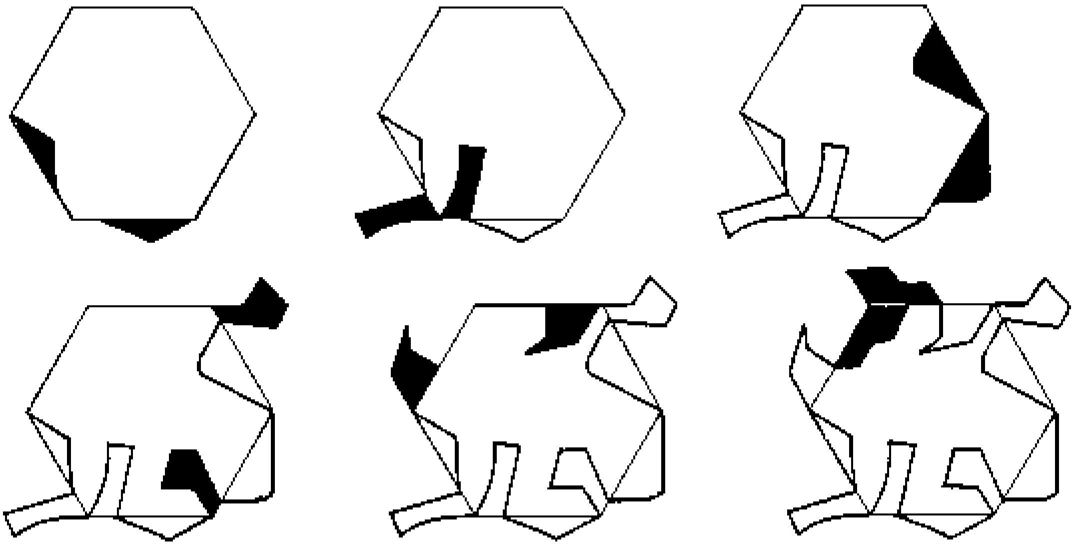
Figura 22: Borboletas, 1948 – tinta, aquarela



Fonte: <http://www.mcescher.com/gllery/symmetry/>

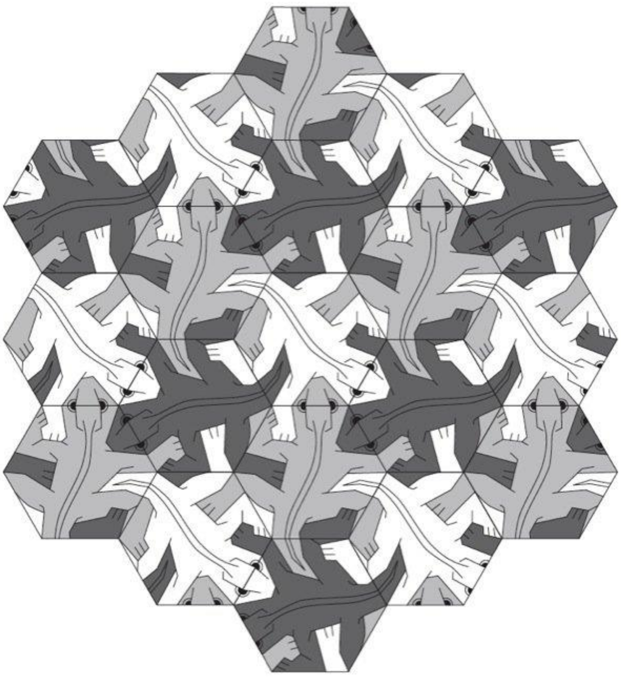
Um dos mosaicos mais famosos de Escher é o chamado ‘Lagarto’, do ano de 1939, em que ele consegue convergir um hexágono regular em um lagarto auto encaixável que através de simetria por rotação recobrem perfeitamente o plano sem sobreposição e sem que restem espaços vazios entre elas. Esta transformação pode ser vista na **Figura 23**, os encaixes perfeitos na **Figura 24** e o resultado final da obra na **Figura 25**.

Figura 23: Transformação do hexágono regular em um lagarto



Fonte:**<**https://www.uv.es/~buso/escher/totpod_es.html>

Figura 24: Mosaico de hexágonos regularescom desenhos dos lagartos



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/498632989964932517/>

Figura 25: Lagarto, 1939 – tinta da Índia, lápis, aquarela

Fonte: <http://www.mcescher.com/gllery/symmetry/>

Ao analisar os mosaicos de Escher, percebe-se que além da isometria utilizada para formar as peças, muitos outros conceitos geométricos emergem, como a exploração das figuras geométricas, ângulos internos e externos dos polígonos, ângulos congruentes, opostos pelo vértice, complementares, suplementares e replementares, fornecendo boas opções de estudos que podem ser utilizados para o ensino da matemática e ainda fornece aos alunos o contato com as artes, a cultura e ao estímulo da criatividade .

Nesse sentido, confirma-se a hipótese inicial do presente capítulo, de que os mosaicos de Escher estão permeados de conceitos geométricos, sendo uma boa opção para o ensino de geometria em sala de aula, para que o mesmo ocorra sem as práticas mecanizadas do ensino tradicional. Para concretizar esta afirmação, o próximo capítulo apresenta uma proposta de ensino por meio dos mosaicos, explorando os ângulos, as áreas e as simetrias das figuras.

CAPÍTULO III – UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DOS MOSAICOS DE ESCHER NA SALA DE AULA

"Em vão tento acreditar que algo tão óbvio como formas de desenho que se complementam não tivesse ocorrido a ninguém antes".
M.C. Escher

Ao longo do presente trabalho, analisou-se o desenvolvimento do ensino de geometria no Brasil a partir do século XX, destacando-se seus desafios e limitações no decorrer da história. Apresentou-se também,um pouco da vida e obra de MauritsCornelisEscher, com destaque ao seu trabalho artístico genial, onde pode ser evidenciado um rico conhecimento geométrico.

> O trabalho de Escher pode contribuir como um meio de aprofundar ou conhecer conceitos geométricos e representar o mundo. As obras, se utilizadas na escola, dão ao processo ensino-aprendizagem maior dinamismo e referem-se às necessidades atuais de aprendizagem. O aluno deixa de ser apenas observador e passa, com o aprendizado, a agir. Por meio da dinâmica visual, que propõe o trabalho de Escher, é possível significativa aprendizagem do conteúdo de desenho geométrico, da arte e da matemática(BARTH, 2006, p. 78).

Dessa forma, para encerrar o estudo, na sequência pretende-se apresentar uma sugestão de ensino de conteúdos geométricos por meio dos mosaicos de Escher. Assim, encerrar-se-á o ciclo proposto com a apresentação de uma possível alternativa para a promoção do ensino de geometria de forma significativa, dinâmica e criativa.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DO PLANO DE AULA

Propõe-se aqui, um plano de aula pensado para estudantes do 7º ano do ensino fundamental, contudo, o plano pode ser facilmente adaptado para outras séries e públicos. Pretende-se discutir os conceitos de: polígonos regulares; preenchimento de áreas por polígonos regulares; ângulos internos de polígonos regulares; ângulo de uma volta completa; simetrias por reflexão, rotação e translação. Espera-se ainda que os discentes desenvolvam habilidades de comunicação (oral e escrita) em matemática e que percebam algumas possíveis interações entre artes e matemática.

Estima-se que um total de cinco aulas de cinquenta minutos cada seja suficiente para essa atividade, contudo, o tempo sempre depende do público e das condições em que a atividade é desenvolvida. Em virtude dessa estimativa, o presente plano está dividido em 5 aulas.

O objetivo geral dessa atividade é promover a percepção de simetrias presentes em alguns dos mosaicos de Escher e incentivar o processo criativo nos estudantes por meio da criação de novos mosaicos. Para isso são almejados os seguintes objetivos específicos: Identificar as simetrias presentes nos mosaicos de Escher; reconhecer os ângulos internos das figuras que formam um mosaico regular; comparar as áreas das figuras regulares com as das figuras formadas por Escher;associar conhecimentos geométricos com artísticos; construir mosaicos com base nas técnicas de Escher; e apresentar os resultados e conclusões decorrentes da atividade em uma exposição.

3.2 ROTEIRO DE AULA

Aula 1 – Apresentando MauritsCornelisEscher

Neste primeiro momento, deve-se perguntar aos alunos se eles conhecem ou já ouviram falar de Escher, se houver alguma resposta afirmativa, questionar o que se sabe e iniciar um diálogo com a turma. Se ninguém conhecer, realizar uma apresentação inicial utilizando a biografia do artista presente no segundo capítulo deste trabalho, destacando também as fases das obras e suas influências. Neste momento pode ser utilizado o projetor com uma apresentação em software específico, para que os discentes visualizem melhor as produções do artista em questão. Em seguida apresentar o vídeo: “Escher – Metarmorfoses –

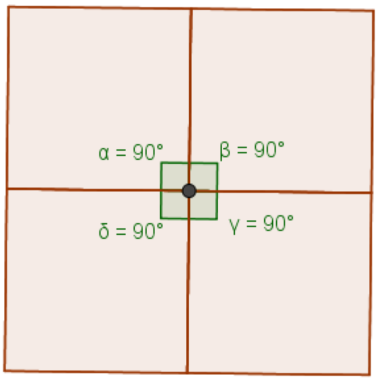
Documentário” (ESCHER... 2011), que trata da vida e obra, suas influências e o modo que sua arte se desenvolveu.

Aula 2 – Conhecendo os mosaicos regulares

Nesta aula o objetivo é fazer com que os discentes conheçam os mosaicos e os três tipos de mosaicos regulares, para isto, em um primeiro momento questioná-los se já ouviram falar em mosaicos ou se sabem do que se trata. Indagar os alunos até que consigam elaborar uma definição para a palavra. Se a escola tiver computadores disponíveis com acesso à internet, pedir para que façam uma pesquisa sobre os mosaicos regulares. Caso não tenha este recurso preparar uma apresentação em projetor.

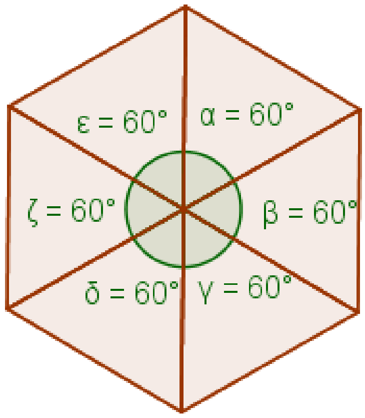
A ideia é que os alunos descubram os três tipos de mosaicos regulares, preparando com antecedência algumas figuras regulares (triângulos, quadrados, hexágonos, pentágonos, etc.) desenhadas e recortadas em papel cartão, para que os discentes tentem descobrir quais formam mosaicos regulares. Após os testes, perguntar por que só existem três, levantando a questão dos ângulos internos dos polígonos de modo que eles concluam que a soma em torno do ponto de encaixe deve ser igual a 360° para que seja possível montar o mosaico sem que fiquem espaços vazios entre as figuras. Dessa forma, utilizar as **Figuras 26, 27**e **28** para exemplificar.

Figura 26: Mosaico regular formado por quadrados



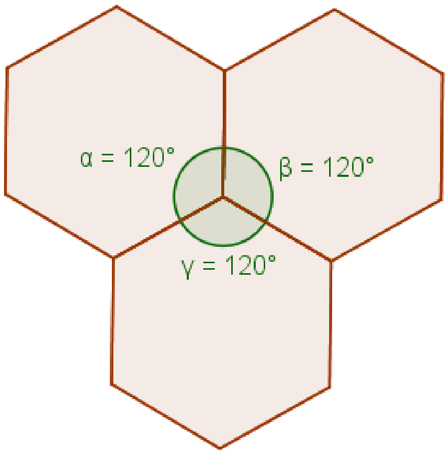
Fonte: elaboração própria com auxílio de software Geogebra.

Figura 27: Mosaico regular formado por triângulos



Fonte: elaboração própria com auxílio de software Geogebra.

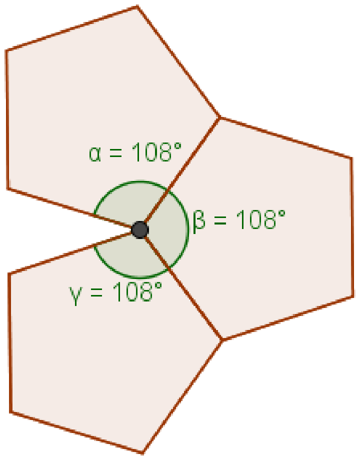
Figura 28: Mosaico regular formado por hexágonos



Fonte: elaboração própria com auxílio de software Geogebra

Na sequência, perguntar se é possível formar um mosaico regular com pentágonos, aguardar as respostas e apresentar a **Figura 29**.

Figura 29: Pentágonos regulares que não formam mosaico



Fonte: elaboração própria com auxílio de software Geogebra.

Demonstrar que não é possível formar o mosaico, pois ao se encaixar três pentágonos os ângulos internos adjacentes somariam 324° e se fossem quatro pentágonos haveria sobreposição das peças. Esse momento é uma oportunidade para mostrar também que as medidas dos ângulos internos do hexágono, quadrilátero e triângulo regulares são números divisores de 360.

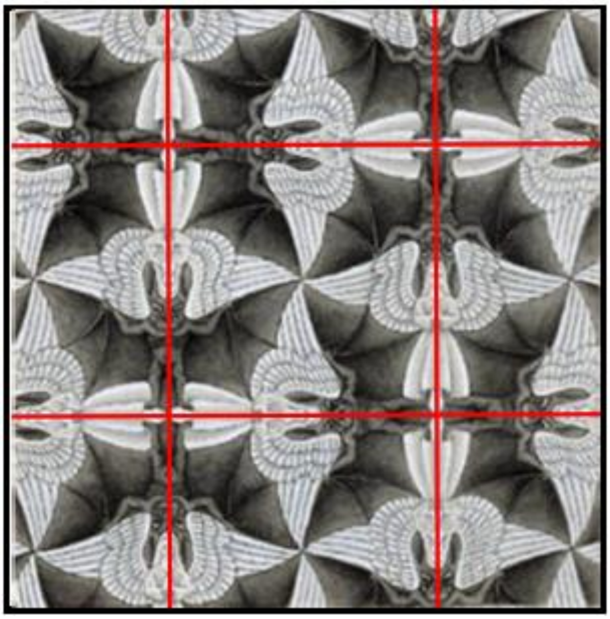
Após tais demonstrações, apresentar os mosaicos de Escher da **Figura 8**, do capítulo anterior, e dizer que são mosaicos regulares, sem explicar aos alunos que técnica o artista utilizava para construir as obras, instigando assim a curiosidade e deixando um adendo para as próximas aulas.

Aula 3 – Explorando os tipos de simetrias

No primeiro tempo desta aula perguntar aos alunos se sabem o que é simetria. Em seguida, dependendo das respostas, conduzi-los aos conceitos da rotação, translação e reflexão, apresentando uma aula expositiva e teórica sobre o tema (conceitos presentes na seção 2.3 do presente trabalho).

Depois destas conceituações, mostrar alguns mosaicos de Escher que contenham as simetrias apresentadas e apontar de que forma o artista as utilizou. Como por exemplo, na **Figura 30**.

Figura 30: Anjos-Demônios com marcações para se perceber as simetrias



Fonte: ALVES, 2014, p. 47

Levar alguns espelhos e pedir para que os discentes façam desenhos e coloquem o espelho ao lado para perceber a simetria por reflexão. Em seguida, estimular os alunos para que imaginem um espelho no lugar dos traços vermelhos, entendendo a simetria por reflexão. Pedir que eles façam desenhos que apresentem simetria por reflexão e identificar, nesses desenhos, o eixo de simetria.

Usar a **Figura 30** para mostrar também a simetria por rotação que pode ser observada fixando-se um ponto no encontro das asas (ALVES, 2014). Pedir que os estudantes façam desenhos usando a simetria por rotação. Uma sugestão para essa atividade seria fazer o mesmo desenho em seis triângulos equiláteros de mesmo tamanho, fixa-los um sobre o outro usando um alfinete para prendê-los em um de seus vértices e girá-los até que se encaixem perfeitamente formando um desenho com simetria por rotação.

Para a simetria por translação pode-se utilizar a **Figura 31**, explicitando que esse tipo de simetria pode ser observado nos desenhos enfileirados, pois as figuras só mudam de posição, permanecendo em mesmo sentido e direção. Os estudantes também poderão observar a simetria por rotação uma vez que em fileiras consecutivas, os animais estão rotacionados em 180º.

Figura 31: Cavalo/Pássaro, 1949 – Lápis colorido, tinta e aquarela

Fonte: <http://www.mcescher.com/gllery/symmetry/>

Em seguida apresentar outros mosaicos de Escher (por exemplo, as **Figuras 12, 14, 15, 17, 18, 20, 22 e 25** do capítulo anterior) e pedir para que os discentes identifiquem as simetrias utilizadas, levantando uma discussão sobre o assunto com a turma.

Aula 4 - Apreciando as transformações dos mosaicos de Escher

Iniciar esta aula relembrando os conceitos aprendidos até então, os mosaicos regulares e as simetrias. Perguntar se os mosaicos de Escher são formados por figuras regulares e problematizar a questão com os alunos.

Após este momento, expor uma apresentação em projetor com as transformações que Escher aplicava as figuras regulares e formava outros desenhos, utilizando, por exemplo, as **Figuras 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23 e 24** do capítulo anterior, e também os vídeos " Anatomy of an Escher Flying Horse" (ANATOMY... 2010) e "Anatomy of an Escher Lizard" (ANATOMY... 2010), que apresentam de forma dinâmica as transformações realizadas pelo artista.

Em seguida, iniciar uma discussão sobre as áreas das figuras presentes nos mosaicos de Escher. Pode-se questionar, por exemplo, qual será a área do peixe que foi criado a partir de um quadrado cuja área é conhecida. Espera-se que os estudantes percebam que a quantidade de área ocupada pelo peixe é a mesma ocupada pelo quadrado. Isso porque a técnica utilizada por

Escher prevê a construção de figuras a partir de polígonos regulares e que todas as partes que são retiradas do interior do polígono são acrescentadas do lado de fora.

Como exercícios para essa parte, pode-se pedir que os estudantes identifiquem qual polígono deu origem às figuras criadas por Escher e representadas nos mosaicos apresentados nas **Figuras 17, 18** (triângulos equiláteros), **20, 22**, (quadrados) e **25** (hexágonos), estimulando sempre a criatividade e conduzindo a aula por meio de perguntas e respostas.

Aula 5 – Criando seus próprios mosaicos

Diante dos conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores, propor aos estudantes que confeccionem seus próprios mosaicos, inspirados nas técnicas de Escher. Dividir a turma em duplas ou equipes e deixar que soltem a criatividade, mas sempre orientando para a utilização de forma correta dos conceitos aprendidos, escolhendo primeiramente qual polígono regular será utilizado e atentando para as partes retiradas e recolocadas para formar os desenhos. O trabalho pode ser feito em papel sulfite colorido ou no branco, para que depois eles mesmos possam colorir.

Em seguida, após os trabalhos prontos, solicitar que sejam apresentados e que os discentes apontem o polígono regular utilizado, bem como as simetrias. Após este momento preparar uma exposição dos trabalhos para toda a escola, para que outras pessoas tenham a oportunidade de conhecer este tipo de obra.

Ao encerrar estas aulas, se bem preparadas, espera-se que os alunos tenham obtido uma boa percepção dos conceitos geométricos trabalhados, uma vez que foram apresentados de forma mais dinâmica e visual, estimulando a criatividade e valorizando os conhecimentos prévios de cada um.

Sugestões para avaliação:

A avaliação deve ser feita ao longo de todas as aulas, observando sempre o interesse, a responsabilidade, a participação nas atividades, e na apresentação dos trabalhos produzidos. Pode-se solicitar também que os discentes elaborem um relatório sobre as atividades desenvolvidas, enfatizando os conteúdos ensinados, o que entenderam e o que não compreenderam, também se gostaram ou não das aulas. Para que dessa forma possa esclarecer as possíveis dúvidas que permaneceram.

Sugere-se que o professor, enquanto os alunos trabalham nas atividades, observe como eles estão interpretando e usando os conceitos estudados. Sempre que necessário o professor deve intervir, seja imediatamente ao perceber alguma dificuldade, seja no replanejamento das atividades para as aulas seguintes.

O trabalho com os mosaicos tem forte apelo experimental para os estudantes, contudo, cabe ao professor cuidar para que a aula não se limite às percepções empíricas dos conceitos. Nesse sentido a exposição dos trabalhos também é uma ótima forma de avaliação, pois, ao explicarem como construíram os desenhos, quais conceitos estão envolvidos e quais técnicas foram utilizadas, tem que se expressar matematicamente. O uso de termos adequados, a clareza e objetividade nas explicações e a destreza ao responder as questões que surgirem durante a exposição, são indicativos do quanto os educandos estão dominando os conceitos matemáticos.

3.3UMA REFLEXÃO SOBRE O ROTEIRO DE ENSINO APRESENTADO

Uma das preocupações iniciais deste trabalho era a de buscar alternativas a um ensino mecanizado e sem significado pelo qual passei em toda minha trajetória escolar. O roteiro de ensino apresentado cumpriu esse papel ao romper com certas estruturas desse tipo de ensino, dito tradicional. Para entender melhor essas colocações, primeiro será caracterizado o que se está entendendo por ensino tradicional e depois serão apresentadas quais estruturas desse modelo de ensino puderam ser quebradas com o presente trabalho.

Especificamente nesse contexto, está se caracterizando ensino tradicional como aquele em que as aulas são expositivas, ou seja, o professor expõe o conteúdo oralmente e por meio de textos e desenhos apresentados na lousa ou em livros didáticos. Em seguida, normalmente são apresentados exemplos de aplicações dos conceitos e, por fim, é apresentada uma lista de exercícios em que os estudantes devem repetir os procedimentos apresentados nos exemplos para memorizar. Normalmente esse tipo de atividade se enquadra no que Skovsmose (2000) caracteriza como o “paradigma do exercício”, isto é, são atividades com respostas fechadas e frequentemente sem preocupação com significados esternos à matemática.

Neste tipo de abordagem o professor é protagonista, é quem detém o conhecimento e precisa “transmiti-lo” aos estudantes, leigos no assunto. O tratamento dos conceitos matemáticos é formal e sem preocupações com os contextos histórico-culturais em que foram produzidos e o aprendizado se dá por observação, assimilação e repetição. Dessa forma, as salas de aulas são organizadas em fileiras onde os estudantes se sentam individualmente e em silêncio, pois toda a atenção deve estar voltada para o professor.

De acordo com a classificação apresentada por Fiorentini (1995), ao propor tendências de ensino que têm se destacado no contexto brasileiro do século XX, o modo tradicional, definido aqui, se aproxima das tendências ditas formalistas (formalista clássica, com forte referência na lógica dedutiva de Euclides; e formalista moderna, relacionada ao formalismo estrutural proposto no Movimento da Matemática Moderna).

Portanto, a proposta de ensino apresentada rompe com a concepção tradicional já de início, ao propor que os conceitos matemáticos sejam explorados intuitivamente pelos estudantes a partir dos mosaicos de Escher. O conceito formal é consequência do trabalho desenvolvido e seu espaço está reservado para as últimas ações da tarefa proposta. Além disso, o conhecimento matemático é considerado como um produto sociocultural, não dissociado de outras práticas humanas como o desenho e pintura, por exemplo.

Do ponto de vista da organização do espaço de ensino-aprendizagem, os estudantes trabalham em grupos, expõe suas opiniões e negociam significados matemáticos. Ou seja, são considerados os conhecimentos que os estudantes trazem dos contextos socioculturais em que estão inseridos.

Portanto, a proposta de ensino apresentada se aproxima de metodologias e concepções de ensino que têm se destacado nas pesquisas em Educação Matemática dos tempos modernos. Tal como a investigação matemática proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) e Skovsmose (2000) –"Investigar é procurar conhecer o que não se sabe" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2015. p. 13) – ou ainda, da "Atividade Orientadora de Ensino" (MOURA, 2001), definida como "aquela que se estrutura de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação problema" (MOURA, 2001, p. 155).

Em síntese, pode se dizer que a atividade aqui proposta tem aproximações com várias das tendências atuais de ensino, contudo, optou-se por não se prender à definições e classificações, pois mais que um procedimento metodológico, buscou-se por uma concepção filosófica e epistemológica em que o conhecimento matemático é tido como produto sócio-histórico-cultural. Em outras palavras, buscou-se por uma matemática mais humana, que não se basta em si mesma, e consequentemente se torna mais significativa para os estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

“ E a sensação de não ter destino certo será mera ilusão de ótica.”
M. C. Escher

O presente estudo se iniciou com uma apresentação, da minha trajetória de formação e das angustias que vivenciei em decorrencia das experiências, enquanto era estudante do ensino básico, com formas tecnicistas de abordagem dos conceitos matemáticos, frequentemete empregadas por meus professores. Junto a essas angustias, vieram as inquietações, pois no momento em que me reconheci como professora de matemática – em formação inicial – passei a buscar por formas de se pensar em um ensino-aprendizagem de matemática de modo que este seja mais atraente e significativo para os estudantes.

Nesse contexto, identifiquei a possibilidade de uma abordagem interdiscilinar entre matemática e artes, teci uma investigação cujo objetivo foi de compreender uma possível forma de se organizar o ensino de alguns conceitos geométricos explorando os mosaicos produzidos pelo artista holandês Maurits Cornelis Escher.

Para alcançar esse objetivo, realizei um estudo sobre o ensino de geometria no Brasil no último século em que pude perceber desde a perda de espaço para geometria nos currículos de cursos de formação básica, a partir do Movimento da Matemática Moderna, até a existência de modos tecnicistas de organização do ensino, onde a técnica (fórmulas e algoritmos) era valorizada em detrimento da compreensão conceitual.

Em seguida, percebi a riqueza de conceitos matemáticos presentes nos mosaicos de Escher, principalmente no que se refere à geometria. Embora esses conceitos não estejam claramente explícitos, com um pouco de cuidado do professor, eles podem ser evidenciados e apreciados em aulas de matemática. Dessa forma, se tornam ótimas ferramentas didáticas, com um leque de opções incríveis. Uma delas foi apresentada no capitulo três desta monografia.

A complexidade dos mosaicos de Escher é analisada e desvendada a partir do conhecimento de técnicas artísticas simples, mas ricas em conceitos matemáticos como o próprio conceito de mosaico, os polígonos regulares e seus ângulos internos, o conceito de área, e as simetrias por reflexão, rotação e translação.

Ao final da pesquisa, algumas das minhas angústias se amenizam no sentido de que a possibilidade de um ensino mais significativo e atrativo para os estudantes, começa a ganhar corpo e figurar como fragmento da minha identidade profissional, isto é, de professora de matemática. Sabe-se que o trabalho desenvolvido é ínfimo diante do que se espera, em termos de conhecimentos didáticos e de conteúdo específico, mas se agiganta no sentido de prover possibilidades de ações para a minha qualificação, que está apenas por iniciar.

Saliento também, que as contribuições dessa pesquisa podem se estender a outros professores e pesquisadores a partir do momento em que o trabalho se torna público. Em síntese, espero que o presente estudo possa trazer importantes contribuições a todos os leitores que busquem pensar em como promover o ensino de geometria com qualidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, Erenilda Severina da Conceição. **Geometria e Arte:** Uma proposta metodológica para o ensino de geometria no sexto ano. 2017. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFAL_bd43634b15448c1b1a58adff6e5ddf84>. Acesso em: 25 ago. 2017.

ALVES, Claudia Maria Fiuza. **O estudo da simetria através da arte de MauritsCornelisEscher.** 2014. 65 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

ANÁLISE Geométrica**,** 2017. Disponível em: <http://www.fec. unicamp. br/~laforma /tupan /nova versao/criacao.html>. Acessoem: 23 mai 2017.

ANATOMY of an Escher Flying Horse.Produção de Paul Gigant.S.i.: Paul Gigant, 2010.Youtube (1,6 min.), son., color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=NYGIhZ_HWfg>. Acesso em: 12 jun. 2017.

ANATOMY ofanEscherLizard. Produção de Paul Gigant. S.i.: Paul Gigant, 2010.Youtube (1,38 min.), son., color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=T6L6bE_bTMo>. Acesso em: 12 jun. 2010.

ANDRADE, Emerson Teixeira de. **Construção de mosaicos inspirados nas obras de MauritsCornelisEscher.** 2015. 139 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de Brasilia, Brasilia, 2015.

AZEVEDO, Gislane Campos; SERIACOPI, Reinaldo. **História:** volume único. São Paulo: Editora ática, 2009.

BARTH, Glauce. **Arte e Matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de M. C. Escher**. 2006. 146f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

BERRO, Roberto Tadeu. **Relações entre arte e matemática:** um estudo da obra de mauritscornelisescher. 2008. 107 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2008.

CARDOSO, Franciele Catelan. **O ensino da geometria e os registros de representação sob um enfoque epistemológico.** 2012. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/831/270>. Acesso em: 25 ago. 2017.

CARNELOS, Leonardo. **M. C. Escher.** 2010. Disponível em: <http://www.artperceptions.com/2010/02/m-c-escher.html>. Acesso em: 28 mar. 2017.

CLEMENTE, João Carlos et al. **Ensino e aprendizagem da geometria:** um estudo a partir dos periódicos em educação matemática. 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/ENSINO-E-APRENDIZAGEM-DA-GEOMETRIA-UM-ESTUDO-A-PARTIR-DOS-PERIÓDICOS-EM-EDUCAÇÃO-MATEMÁTICA.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2017.

CLUBES de Matemática da OBMEP,2017. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/. Acesso em: 23 mai 2017

COUSIN, Alexandra de Oliveira Abdala. O Movimento da Matemática Moderna nos boletins da Sociedade Paranaense de Matemática. **Rev. Diálogo Educ,** Curitiba, v. 11, n. 34, p.751-768, set. 2011.

ESCHER – metamorfose – documentário. Direção de Jan Bosdriesz. S.i.: Forza, 2011.Youtube (60 min.), son., color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pVwrUUwzBRo>. Acesso em: 12 jun. 2017.

EXPLORE Tatuagens, Arte De Escher e muito mais!2017**.** Disponível em: https://br.pinterest.com/pin/498632989964932517/. Acesso em: 23 mai 2017.

FERREIRA, Ana Célia da Costa. **Ensino da Geometria no Brasil:** enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna. 2005. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI136.pdf>. Acesso em: 05 jan. 2017.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, SP, CEMPEM, ano 3, n.4, p. 1-38, 1995.

GONÇALVES, Jamille Santana; LANDO, Janice Cassia. O ensino de geometria, em escolas públicas, na cidade de Jequié - Bahia. **Revista Eventos Pedagógicos,** Jequié, v. 3, n. 3, p.363-389, ago. 2012. Disponível em: <http://www.ucs.br/ etc/conferencias /index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/831/270>. Acesso em: 25 ago. 2017.

GUIMARÃES, Bruno Alysson Andrade; SANTOS, Wilson Luiz Souza. **A problemática no ensino de geometria.** 2013. Disponível em: <https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/download/.../369>. Acesso em: 25 ago. 2017.

HAGAMOS mosaicos,2017**.** Disponível em: https://www.uv.es/~buso/escher/totpod_es.html. Acesso em: 23 mai 2017.

ILLUSTRATUS, História do Mosaico. Disponivel em: <http://blogillustratus.blogspot.com.br/2010/03/mosaico.html>. Acesso em: 19 nov. 217.

JORGE, Marilisi Oliveira. **Pintando o cubo:** matemática com artes. 2011. 82 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria. In: **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

KOPKE, Regina Coeli Moraes. **Geometria, desenho, escola e transdiciplinaridade:** abordagens possíveis para a educação. 2006. 226 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: <http://www.educacao.ufrj.br/ppge/teses/reginakopke.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2017.

MANZANO, José. Basílica d Aparecida. Disponível em: <https://brasildelonge.com/2017/10/18/basilica-de-aparecida/>. Acesso em: 19 nov. 2017.

M. C. Escher – The Official Website, 2017. Disponível em: http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/. Acesso em: 23 mai 2017.
MATEMÁTICA viva, 2017. Disponível em: http://www.matematicaviva.pt/2013/10/a-arte-matematica-de-escher.html. Acesso em: 23 mai 2017.

MENESES, Ricardo Soares de. **Uma história da geometria escolar no Brasil:** de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2007.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dário; MIORIM Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?.**Pro-Posições**, v. 3, n.1[7], Campinas, SP, março de 1992.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 19 – 39, 1993.

MOCROSKY, Luciane Ferreira; MONDINI, Fabiane; ESTEPHAN, Violeta Maria. **O ensino de geometria no brasil:** alguns aspectos da sua origem nos livros didáticos brasileiros. 2012. Disponível em: <www.sinect.com.br/2012/down.php?id=2626&q=1>. Acesso em: 10 jan. 2017.

MOSAICO. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Mosaico&oldid=48539330>. Acesso em: 13 abr. 2017.

MOURA, M. O de. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.;

CARVALHO, A. M. P. de (org.) **Ensinar a ensinar:** didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira, 2001. p. 143-162.

NIKOLOVA, Mariza. **História dos Mosaicos.** 2010. Disponível em: <http://www.mozartica.com/pt/page/mosaic-history/>. Acesso em: 26 maio 2017.

PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglion. **Representação, interpretação e prática pedagógica:** a geometria na sala de aula. 2000. 364 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: <http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/00002C/00002C6B.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2017.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**. Campinas: UNICAMP, Ano 1, n. 1, 1993

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de Geometria: uma visão históric**a. (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.
PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A geometria escolar:** uma análise dos estudos do abandono de seu ensino. 2001. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11182/1/dissertacao_maria_regina_pereira.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2017.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção tendências em educação matemática).
PIASESKI, Claudete Maria. **A geometria no ensino fundamental.** 2010. 35 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, URI, Erechim, 2010.

PINATTI, AdelineLaudicéia; LORIN, João Henrique. **Simetrias nas obras de Escher:** uma possibilidade de ensino por meio da arte. 2014. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/nupem/anais_ix_epct/PDF/TRABALHOS-COMPLETO/Anais-CET/30.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2017.

PIROLA, Nelson Antonio. **Solução de problemas geométricos:** dificuldades e perspectivas. 2000. 245 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record /CAMP_124ae1387 cce915291f707338394e185/Details>. Acesso em: 25 ago. 2017.

RIOS, Dermival Ribeiro. **Minidicionário escolar:** Língua Portuguesa. São Paulo: DCL, 2001

SAMPAIO, Patrícia (2012). A Matemática através da Arte de M. C. Escher. **Millenium**, 42 (janeiro/junho). Pg. 49-58.

SANTOS, Juliana Batista Pereira dos; TOLENTINO-NETO, Luiz Caldeira Brant de. O que os dados do SAEB nos dizem sobre o desempenho dos estudantes em Matemática? **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 2, n. 17, p.309-333, nov. 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/22442/pdf>. Acesso em: 25 ago. 2017.

SANTOS, Tawana Telles Batista; NUNES, Daniel Martins. **Um olhar reflexivo sobre a aprendizagem geométrica no 9º ano do ensino fundamental.** 2014. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/CC/CC_2_SANTOS_TAWANA.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2017.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. **Ensino de Geometria:** Rumos da Pesquisa (1991-2011). 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138>. Acesso em: 03 jan. 2017.

SIMÉTRICA, 2017**.** Disponível em: http://simetrica.esy.es/soumatematica/conceitos-e-curiosidades/biografia-escher/. Acesso em: 23 mai 2017.

SKOVSMOSE, Óle. Cenários de investigação, 2000. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose%28Cenarios%2900.pdf. Acesso em dez/2017.

SOARES, Flavia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** avanço ou retrocesso?. 2001. 202 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Aplicada, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001

THE Geometer'sSketchpad (GSP), 2017**.** Disponível em: http://gsp2559.blogspot.com.br/2016/06/blog-post.html. Acesso em: 23 mai 2017.

TJABBES, Pieter. **O mundo mágico de Escher.** Brasilia: Centro Cultural Banco do Brasil, 2010.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Osvaldo Sangiorgi E O Movimento Da Matemática Moderna No Brasil. **Rev. Diálogo Educ,** Curitiba, v. 8, n. 25, p.583-613, set. 2008.

VERONESE, Paula Cristina de Faria. **O ensino de geometria no ciclo II do ensino fundamental:** Um estudo analítico. 2009. 261 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino da Educação Brasileira, Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Julho de Mesquita Filho, Marília, 2009. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91174>. Acesso em: 25 ago. 2017.