



HANS MULLER JUNHO DE MENDONÇA

Harmonógrafo: concepção, construção e análise

**INCONFIDENTES-MG
2015**

HANS MULLER JUNHO DE MENDONÇA

Harmonógrafo: concepção, construção e análise

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito de conclusão do curso de graduação Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais - Campus Inconfidentes, para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

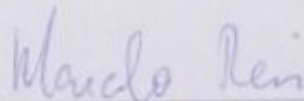
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Augusto dos Reis

**INCONFIDENTES-MG
2015**

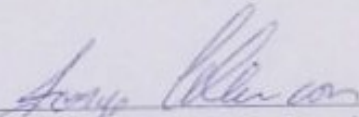
HANS MULLER JUNHO DE MENDONÇA

Harmonógrafo: concepção, construção e análise

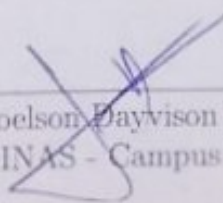
Data de Aprovação: 13 de novembro de 2015



Prof. Dr. Marcelo Augusto dos Reis (Orientador)
IFSULDEMINAS - Campus Inconfidentes



Prof. Dr. Jorge Ferreira Alencar Lima
IFSULDEMINAS - Campus Inconfidentes



Prof. MSc. Joelson Dayvison Veloso Hermes
IFSULDEMINAS - Campus Inconfidentes

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe e meu pai, pois nunca duvidaram do meu esforço e sempre me ensinaram dar valor à vida e às coisas que temos. E ao meu irmão, por ter sido exemplar em seus estudos e servir como exemplo para mim. Eu amo vocês.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço à minha família, amigos e todas as pessoas que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho;
- A todos meus professores que passaram em minha formação, desde o pré, até o presente momento. Sem vocês, nada disso teria acontecido. Meu muito obrigado;
- Agradeço ao meu orientador, não só por sua grande ajuda nesta monografia, mas também pelas conversas produtivas e as dicas para uma vida e carreira acadêmica melhor;
- Agradeço aos meus colegas feitos durante esses anos de estudos na instituição, em especial aos amigos: Willian, Richard e Adelfson, que me aguentaram todos os anos de nossa formação;
- Agradeço aos meus amigos feitos durante meu período de moradia em Inconfidentes, muito obrigado pelos momentos ímpares que vivemos;
- Agradeço ao Instituto Federal do Sul de Minas - Campus Inconfidentes, pela oportunidade de estudar e adquirir grandes conhecimentos nesta instituição.

Resumo

Neste trabalho, nós descrevemos como construir um harmonógrafo com dois pêndulos. A partir das imagens obtidas pelo aparato também comparamos elas aos resultados computacionais gerados por modelos matemáticos. Nossos resultados mostraram uma boa concordância entre as abordagens teóricas e experimentais.

Do ponto de vista teórico, equações diferenciais e a física dos osciladores harmônicos foram essenciais para nossas simulações que permitiram alcançar uma melhor compreensão dos fenômenos.

Esta pesquisa foi considerada duplo sucesso: por um lado, observou-se um acordo entre modelos matemáticos e resultados experimentais, por outro lado, considerou-se como um bom ponto de partida para a visualização de conceitos matemáticos através de modelagem.

Abstract

In this work, we describe how to build a harmonograph with two pendulum. From the images obtained by the apparatus we also compare them to computational results generated by mathematics models. Our results show a good agreement between experimental and theoretical approaches.

From theoretical point of view, differential equations and physics of the harmonic oscillators were essential for our simulations that allowed us reaching better understanding of the phenomena.

This research was considered two fold successful: on the one hand we observed a agreement between mathematical models and experimental results on the other hand it was considered as a good starting point for visualizing mathematical concepts through modelling.

Conteúdo

Lista de figuras	iii
Lista de tabelas	vi
1 Introdução: harmonógrafos	3
1.1 Pêndulo bifilar	4
1.2 Pêndulo de Jhon Dobson	6
1.3 Aparato Stöhrer	8
1.4 Harmonógrafo de Pickering	9
1.5 Harmonógrafo com três pêndulos	10
2 Harmonógrafo de dois pêndulos	12
2.1 Funcionamento	12
2.2 Construção	13
2.3 Problemas encontrados	17
2.4 Resultados	20
3 Modelagem e simulação de um harmonógrafo	23
3.1 Modelagem de um pêndulo simples	24
3.2 Modelo do harmonógrafo de dois pêndulos	32
3.3 Simulação e comparações entre modelos teóricos e experimentais	35
4 Considerações Finais	37
A Figuras de Lissajous	38
B Código das simulações e valores dos parâmetros	41
C Equações diferenciais ordinárias e osciladores harmônicos	44
C.1 Movimento harmônico simples	44
C.2 Movimento harmônico amortecido	48

Lista de Figuras

1	Pêndulo dibujante	1
2	Figuras de Chladni.	2
1.1	Pêndulo de Tisley e seus Registros.	3
1.2	Diagrama de um Pêndulo Bifilar (MARLETTA; FERREIRA; GUIMARAES, 2000, p. 573)	5
1.3	À esquerda um experimento de um Pêndulo Bifilar e à direita alguns resultados.	6
1.4	Pêndulo de Jhon Dobson (RIGGE, 1926, p. 68)	7
1.5	Figuras feitas por Hengen com o harmonógrafo de Dobson. Figura adaptada de Rigge (1926, p. 70).	8
1.6	À esquerda um diagrama do aparato de Stöher e do lado direito o próprio.	9
1.7	Harmonógrafo de Edward C. Pickering(WHITAKER, 2001b, p. 174)	10
1.8	Figura adaptada de Harmonógrafo, na qual ilustra o aparato composto por três pêndulos.	10
1.9	Registros feitos por um harmonógrafo composto por três pêndulos movimentando simultaneamente.	11
2.1	Diagrama do movimento dos pêndulos do harmonógrafo.	12
2.2	Funcionamento e registro de um harmonógrafo de dois pêndulos	13
2.3	Protótipo do harmonógrafo de dois pêndulos.	14
2.4	Primeiro registro do harmonógrafo de dois pêndulos em sua etapa de construção.	14
2.5	Modificações feitas durante a construção do harmonógrafo de dois pêndulos	15
2.6	Harmonógrafo de dois pêndulos construído nesta pesquisa.	16
2.7	Do lado direito temos o sistema na configuração II. Do lado esquerdo, o primeiro sistema de articulação do protótipo utilizado na construção. Estas articulações tem por objetivo fazer com que o braço B da figura 2.6 não levante da superfície de desenho.	18
2.8	À imagem do lado esquerdo representa a situação quando utilizado o sistema do "T" de PVC, já a do lado direito o sistema atual.	19
2.9	Imagem gerada quando o <i>gimbal</i> estava em B2 . A imagem apesar de não ser tão bela esteticamente, possui muitas semelhanças com algumas figuras mostradas no apêndice A.3	19
2.10	Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração I, com restrição de movimentos do pêndulo B1 . As imagens são semelhantes, variam apenas sua compressão ou alongamento.	20
2.11	Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Neste mosaico as figuras foramadas apresentam um caratér mais elipsoidal.	21

2.12	Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Pode ser observado que as imagens registradas neste mosaico são diferentes dos mosaicos anteriores, pois o foram feitas utilizando diferentes tipos de manipulações sobre os pêndulos.	21
2.13	Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Neste mosaico existem diferentes estilos de figuras, a primeira figura do mosaico apresenta curvas totalmente diferentes das demais, por exemplo.	22
2.14	Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Nestas figuras existe sobreposição de cores, ou seja, foram feitos registros em cima de registros. Na imagem da direita temos a original e na esquerda a figura foi editada para que assim, pudessem ser vistos os traços de cada desenho melhor.	22
3.1	Processo de modelagem matemática, figura adaptada de STEWART (2013, p. 22).	24
3.2	Pêndulo dibujante	25
3.3	Pêndulo simples.	25
3.4	Pêndulo simples e as forças que atuam sobre ele.	26
3.5	Vista superior de um pêndulo simples na posição de equilíbrio.	26
3.6	Oscilação de um pêndulo simples visto em uma perspectiva superior.	27
3.7	Gráfico de duas funções quaisquer $f(x)$ e $g(x)$, com A sendo o ponto em comum entre as duas.	28
3.8	Gráfico da oscilação de um pêndulo simples, com os valores de $A = 5$, $\omega = \sqrt{5}$ e $\phi = 0$	29
3.9	Ao andar de carro, quando colocamos nosso braço para fora sentimos uma força contrária ao movimento e esta força aumenta ou diminui proporcionalmente a velocidade em que o carro está. Assim, consideramos, de maneira grosseira, que a força de atrito é proporcional à velocidade. A letra c na figura representa como estamos com a posição de nossa mão, ou seja, quanto maior a área exposta, maior o atrito. Isto é definido através da constante de proporcionalidade c	30
3.10	Diagrama de um pêndulo amortecido.	31
3.11	Gráfico da oscilação de um pêndulo simples, com os valores de $A = 5$, $\omega = \sqrt{5}$, $\phi = 0$ e $\lambda = \frac{1}{50}$	32
3.12	Metrônomos acoplados	33
3.13	O círculo vermelho indica onde existe o acoplamento do sistema.	33
3.14	Análise do pêndulo B1	34
3.15	Análise do pêndulo B2	35
3.16	Primeira imagem simulada em (<i>Processing</i>) e comparada com o modelo feito pelo harmonógrafo em sua configuração II.	36
3.17	Segunda imagem simulada em (<i>Processing</i>) e comparada com o modelo feito pelo harmonógrafo em sua configuração II.	36
3.18	Terceira imagem simulada em (<i>Processing</i>) e comparada com o modelo feito pelo harmonógrafo em sua configuração II.	36
A.1	Pêndulo suspenso em Y de James Dean. A descrição de seu movimento pode ser encontrada em Whitaker (2004, p. 402)	38
A.2	Jukes A. Lissajous e seu experimento (CENA; PEREIRA; PEREIRA, 2014, p. 2302-2), imagem adaptada.	39

A.3	Figuras de Lissajous retiradas de Andrade e Campos (2005, p. 590)	40
B.1	Do lado esquerdo temos o código retirado do site já citado no capítulo 3 e do lado direito o novo código sem a taxa de amortecimento fixa.	41
B.2	Do lado esquerdo temos o código retirado do site já citado no capítulo 3 e do lado direito o novo código, onde $y(t)$ possui só o valor de parâmetro em relação ao pêndulo que oscila de 0 a 360 graus.	42
B.3	Valores dos Parâmetros referente a figura 3.16 do capítulo 3	42
B.4	Valores dos Parâmetros referente a figura 3.17 do capítulo 3	43
B.5	Valores dos Parâmetros referente a figura 3.18 do capítulo 3	43
C.1	Respectivas posições de um exemplo de movimento oscilatório simples e em condições ideais, ou seja, sem atrito. Em (a) temos a mola em seu estado de repouso. Em (b) temos uma posição de equilíbrio, quando uma massa m é presa em sua extremidade e em (c) quando ocorre uma pequena perturbação no sistema, tirando – o de seu estado equilíbrio. Figura adaptada de (ZILL; CULLEN, 2001, p. 227).	45
C.2	Cujo F_{mola} é a Força restauradora do sistema e F_p a força peso. Figura adaptada de (ZILL; CULLEN, 2001, p. 227).	46
C.3	Representando um sistema oscilante retirado de Zill e Cullen (2001, p. 236), com uma força dissipativa, que chamaremos F_d	48

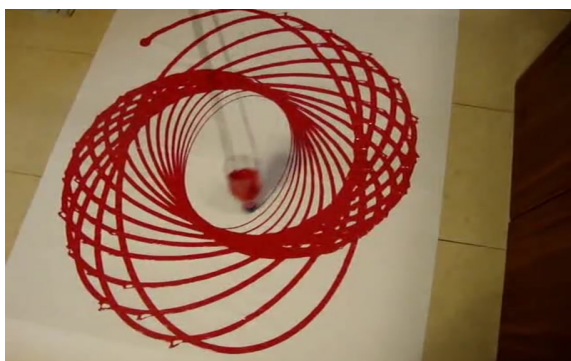
Lista de Tabelas

1.1	Vários tipos de aparatos compostos por pêndulos	4
2.1	Tabela de alguns materiais.	16

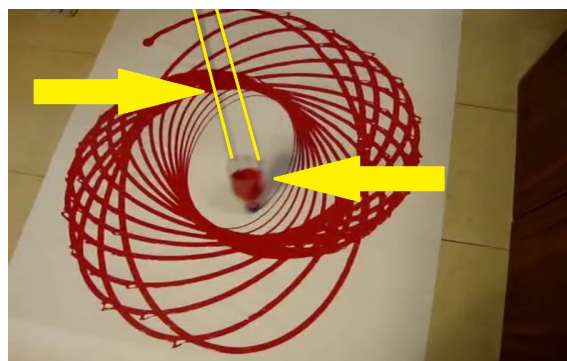
Prefácio

Esta monografia visa relatar a construção de um aparato mecânico, relacionar matemática e simulação computacional, comparando resultados teóricos e experimentais através de uma harmonógrafo de dois pêndulos.

Mas o leitor deve estar se perguntando: "o que é um harmonógrafo?" Harmonógrafo é um aparato capaz de criar/simular figuras geométricas, que na maioria das vezes, apresentam figuras bem interessantes e que talvez seriam complicadas de serem feitas à mão. Um exemplo simples de um harmonógrafo que é capaz de apresentar padrões geométricos é o pêndulo dibujante (figura 1). Este pêndulo pode ser feito de garrafa pet, cheia de tinta e presa a um teto ou em algum suporte, a medida que a garrafa esvazia o pêndulo produz figuras durante suas oscilações.



(a) Pêndulo dibujante oscilando e construindo um padrão de figura geométrica.



(b) Setas indicando a garrafa pet presa em um fio.

Figura 1: Pêndulo dibujante ¹

Outros exemplos de aparatos que produzem figuras geométricas podem ser encontrados no capítulo 1. Mas não são apenas harmonógrafos que produzem imagens com padrões interessantes. Existem estudos de vibrações em placas, iniciados com os trabalhos de Ernest Chladni – físico e músico alemão – há mais de 200 anos atrás (ROSSING, 1982, p. 271). As figuras (figura 2) que são criadas a partir destas vibrações, levaram o nome de “Figuras de Chladni” em sua homenagem.

¹Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=OdVzkm6CA7Y> Acesso em nov. 2015.

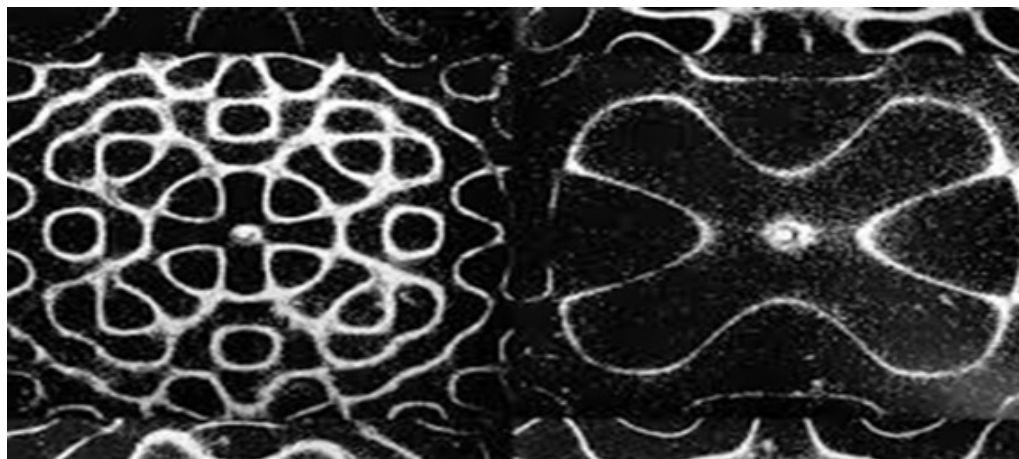


Figura 2: Figuras de Chladni.

Grande parte das figuras produzidas por harmonógrafos possuem semelhanças com as figuras de Lissajous (vide apêndice A), pois a maioria destes aparatos são compostos por pêndulos, em que pode ocorrer a superposição de dois movimentos harmônicos perpendiculares.

Este trabalho teve como objetivo construir e analisar um harmonógrafo de dois pêndulos, além de comparar as figuras produzidas por ele, com imagens feitas computacionalmente utilizando a linguagem de programação *Processing* (vide apêndice B).

Esta monografia foi dividida sucintamente da seguinte forma: primeiro foi estudado diferentes tipos de aparatos (capítulo 1), em seguida, escolhido o harmonógrafo de dois pêndulos, descrevemos seu funcionamento e construção (capítulo 2) mostrando alguns de seus resultados.

Estudos teóricos para se obter um modelo de um harmonógrafo de dois pêndulos, sua simulação e comparação entre resultados teóricos e experimentais (capítulo 3), foram essenciais para as considerações finais (capítulo 4) deste trabalho.

Capítulo 1

Introdução: harmonógrafos

Existem diferentes tipos de harmonógrafos capazes de reproduzirem figuras geométricas. Grande parte destes aparatos são compostos por pêndulos. Os registros destes movimentos oscilatórios que envolvem a superposição de dois ou mais movimentos, foram estudado por James Dean em 1815 (vide apêndice A).

O estudo sobre pêndulo suspenso em Y – que mais adiante em um dos aparatos registradores recebe o nome de pêndulo bifilar – foi apresentado por Hugh Blackburn quando estava estudando em Cambridge em 1844 (WHITAKER, 2004, p. 402). Alguns nomearam este aparato de “Blackburn Pendulum” (Pêndulo de Balckburn), que funcionava da seguinte forma, “um pesado funil oco é preenchido com areia fina (ou tinta) com um pequeno furo na ponta que cai sobre o papel deixando traços da forma como um pêndulo oscila” (WHITAKER, 2001a, p. 171, tradução nossa.).

Em 1873, S.C. Tisley reportou (MAW; DREDGE, 1874, p. 101) um equipamento (figura 1.1) feito de duas hastes verticais presas à uma caneta e cada haste poderia movimentar – se de diferentes maneiras.

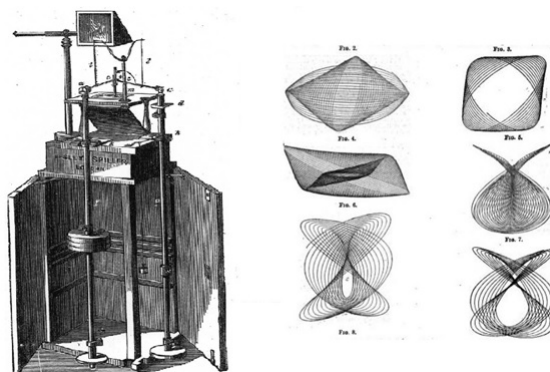


Figura 1.1: Pêndulo de Tisley e seus Registros.

Este aparato de Tisley foi chamado de “Tisley’s Harmonograph” (Harmonógrafo de Tisley) e de acordo com a pesquisa realizada, foi o primeiro uso do termo “Harmonógrafo” em trabalhos na literatura (WHITAKER, 2001a, p. 171). Assim, a partir de

1815, foram criados ou aperfeiçoados diversos tipos de aparatos. Na tabela 1.1, retirada de Whitaker (2004, p. 409), temos alguns exemplos.

Tabela 1.1: Vários tipos de aparatos compostos por pêndulos

Aparato	Ano	Projetista
"Y-suspended Pendulum"	1815	Dean; Bowditch
"Blackburn Pendulum"	1844	Blackburn
"Tisley Compound Pendulum"	1873	Tisley
"Tisley Harmonograph"	1877	Tisley & Spiller
"Sympalmograph"	1877	Browning; Benham
"Dobson Duplex Pendulum"	1877	Dobson
"Double Pendulum"	1894	Bryan
"Pendulograph"	1894	Andrew
"Quadruple Harmonic-Motion Pendulum"	1899	Hoferer
"Twin-elliptic Pendulum"	1906	Benham
"Benham's Triple Pendulum"	1909	Benham

Alguns destes pêndulos ou harmonógrafos, serão apresentados nos tópicos a seguir para melhor compreensão dos mesmos.

1.1 Pêndulo bifilar

Segue o mesmo modelo do Pêndulo de James Dean citado anteriormente e se enquadra dentre os diferentes tipos de movimentos simultâneos de pêndulos. Neste aparato, temos um sistema mecânico alternativo para a superposição de dois movimentos harmônicos independentes e ortogonais, que é denominado pêndulo bifilar.(MARLETTA; FERREIRA; GUIMARAES, 2000, p. 573).

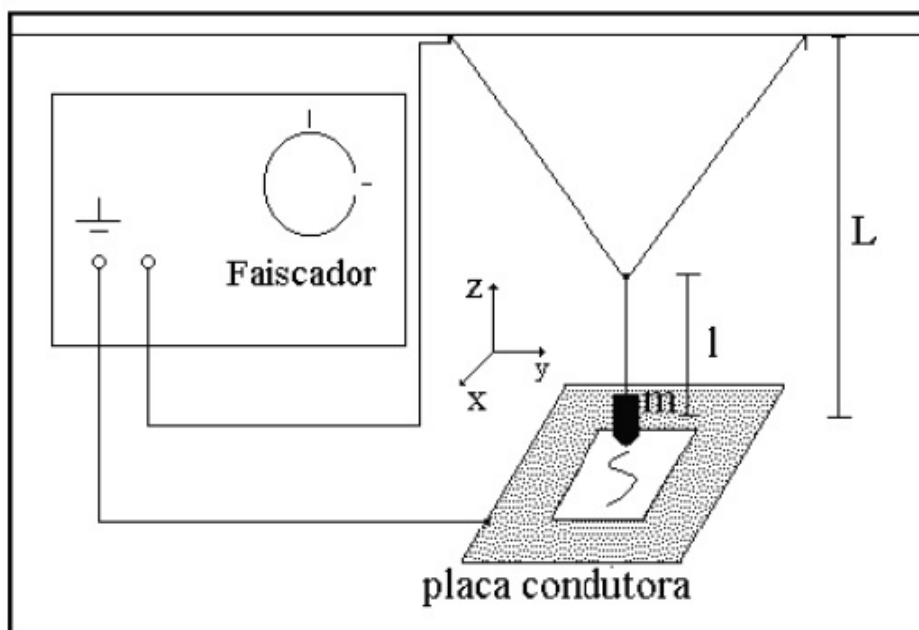


Figura 1.2: Diagrama de um Pêndulo Bifilar (MARLETTA; FERREIRA; GUIMARAES, 2000, p. 573)

Este experimento, representado na figura 1.2, funciona da seguinte maneira: A fonte gera uma tensão pulsada, cujos valores de pico são suficientes para produzir faíscas entre a massa m e a placa condutora. Colocada para oscilar, a trajetória espacial da massa m no plano xy é gravada por pontos em um papel de fax, devido às faíscas (MARLETTA; FERREIRA; GUIMARAES, 2000, p. 573).

Ao ligar este circuito, teremos então a superposição de movimentos harmônicos e que Marletta, Ferreira e Guimaraes (2000, p. 573) descreve da seguinte maneira:

“Trata-se de um corpo de massa m presa à extremidade de um fio, sendo que este fio num dado ponto é separado em dois segmentos na forma de um Y (bifurcação). O comprimento constante l é dado pela distância entre o centro de m e a bifurcação. As outras duas extremidades do fio são presas em um suporte horizontal. A distância entre o centro de m e o suporte é denominada de L sendo variável. Se o corpo é colocado para oscilar no plano yz , observa-se que o ponto de bifurcação permanece imóvel, e o corpo oscila como se apenas fizesse parte de um pêndulo simples de comprimento l (modo de oscilação y). Se o corpo é colocado para oscilar no plano xz , ele oscila como se fizesse parte de um pêndulo simples de comprimento L (modo de oscilação x). Quando o corpo é colocado para oscilar fora dessas duas condições, o movimento resultante é uma combinação desses dois modos de oscilação.”

Portanto, o pêndulo bifilar é mais um entre os diversos encontrados na literatura capaz de produzir figuras de Lissajous. A figura 1.3 mostra alguns resultados.

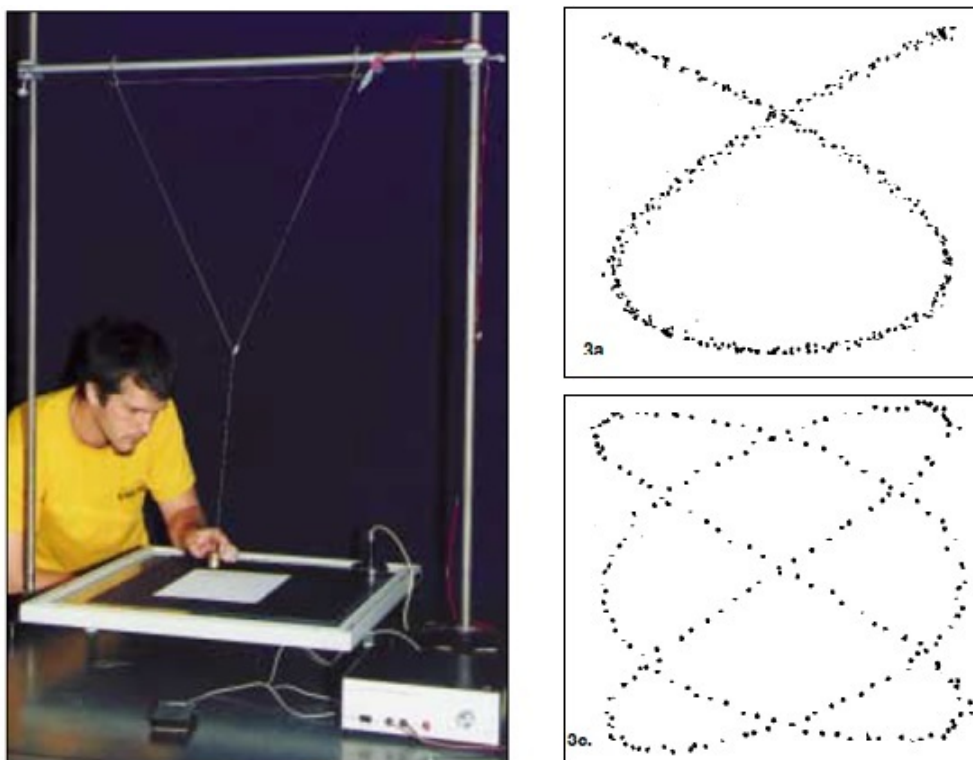


Figura 1.3: À esquerda um experimento de um Pêndulo Bifilar e à direita alguns resultados.²

1.2 Pêndulo de Jhon Dobson

Este aparato (figura 1.4) feito por Jhon Dobson – que era professor de Física e Química em Stonyhurst College – é uma espécie de mecanismo possível de produzir, através de oscilações, algumas figuras de Lissajous. Logo, podendo ser denominado harmonógrafo.

²Disponível em: http://www.researchgate.net/profile/Matthew_Moelter/publication/43292208_Two-Dimensional_Pendulum_Experiments_Using_a_Spark_Generator/links/0c960529df75dc2c47000000.pdf. Acesso em fev. 2015

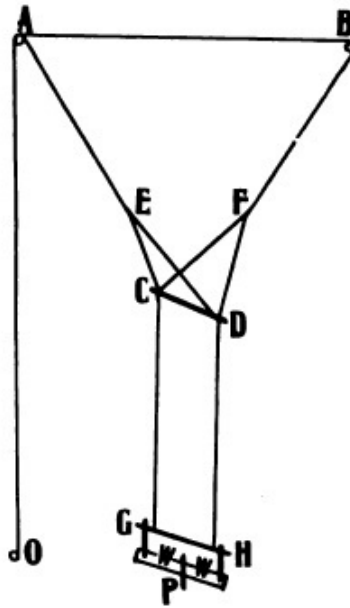


Figura 1.4: Pêndulo de Jhon Dobson (RIGGE, 1926, p. 68)

Em seu livro Rigge (1926, p. 68-69, tradução nossa) explica o funcionamento deste harmonógrafo da seguinte maneira:

“Dois fios seguem a partir de O, onde eles podem ser esticados ou encurtados a partir de uma polia fixa A. Um fio desce diretamente para E, e o outro vai para B e depois F. Aqui ambas as linhas tornam-se bifilares e descem para a haste CD. A partir de CD duas outras linhas descem para a haste GH. Em G está em uma barra e pode girar em torno de si mesmo, assim, os cabos em CD e GH podem ser movidos para frente ou para trás sobre a haste GH. Esta haste GH está presa em um pequeno retângulo de madeira ou outro material, que tem uma caneta. Portanto, o pêndulo é duplo. O primeiro vai de WW a AB e balança norte/sul. O segundo vai de WW até a haste CD, e balança leste/oeste somente.”

Algumas imagens registradas por este tipo de harmonógrafo encontram - se na figura 1.5:

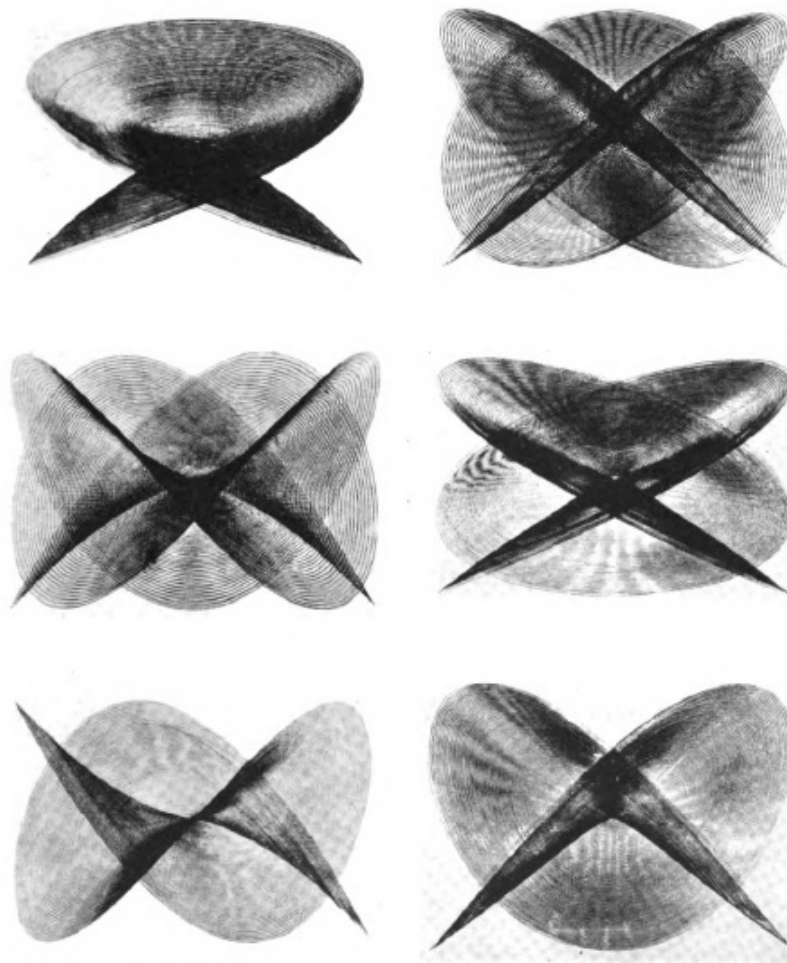


Figura 1.5: Figuras feitas por Hengen com o harmonógrafo de Dobson. Figura adaptada de Rigge (1926, p. 70).

1.3 Aparato Stöhrer

Outro aparato que produz figuras de Lissajous é o aparato de Stöhrer. Este equipamento, segundo Whitaker (2001a, p. 177-178, tradução nossa) funciona da seguinte maneira:

“Cada um dos discos executam um simples movimento harmônico em seu plano de movimento. Um pequeno feixe de luz passa através do ponto de justaposição entre os dois discos, e o simultâneo movimento perpendicular dos dois discos permitem a que a luz trace as figuras de lissajous sobre uma tela.”

Na figura 1.6 é o aparato de Stöhrer, este aparato já foi fabricado por uma empresa chamada Max Köhl.

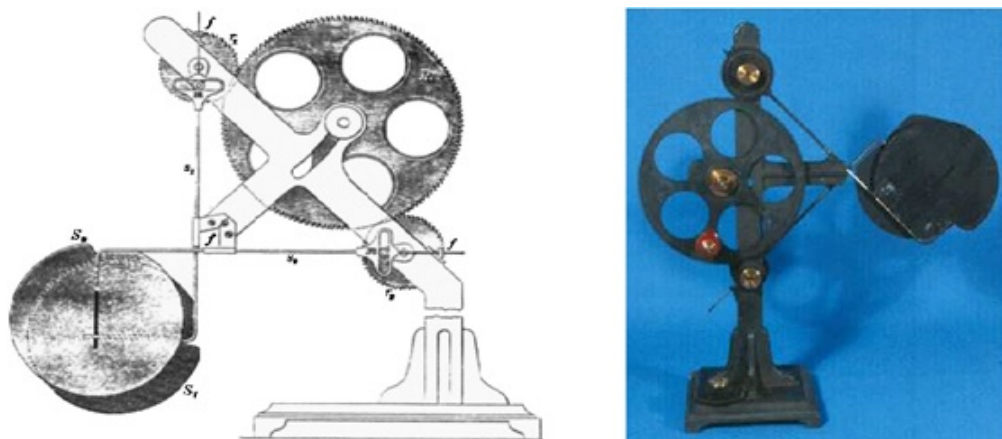


Figura 1.6: À esquerda um diagrama do aparato de Stöher (WHITAKER, 2001b, p. 178) e do lado direito, o próprio.³

1.4 Harmonógrafo de Pickering

Outro aparato desenvolvido para registrar figuras de Lissajous sobre alguma superfície propícia, foi o harmonógrafo de Edward Pickering. Foi construído em 1869 quando ele estava descrevendo o experimento de Lissajous e suas curvas produzidas. (WHITAKER, 2001b, p. 174) Assim, Pickering construiu uma máquina que ele tinha idealizado para desenhar as mesmas curvas. Pickering (1869, p. 55, tradução nossa) descreve esse procedimento:

“O papel sobre o qual as curvas são desenhadas recebem um movimento horizontal para frente e para trás, enquanto, no mesmo tempo, a caneta está movendo verticalmente para cima e para baixo.”

Na figura 1.7 está representado o aparato de Edward.

³Disponível em: http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/Oscillations_and_Waves/Lissajous_Figures/Lissajous_Figures.html Acesso em fev. 2015

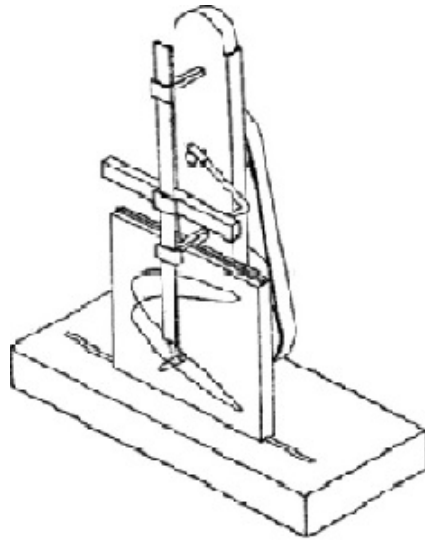


Figura 1.7: Harmonógrafo de Edward C. Pickering(WHITAKER, 2001b, p. 174)

1.5 Harmonógrafo com três pêndulos

Existem muitos tutoriais a respeito deste tipo de harmonógrafo. Em geral, grande parte de sua fabricação é feita de madeira, mas também existem alguns metais presentes na sua montagem. Na figura 1.8 é mostrado um harmonógrafo composto por três pêndulos.

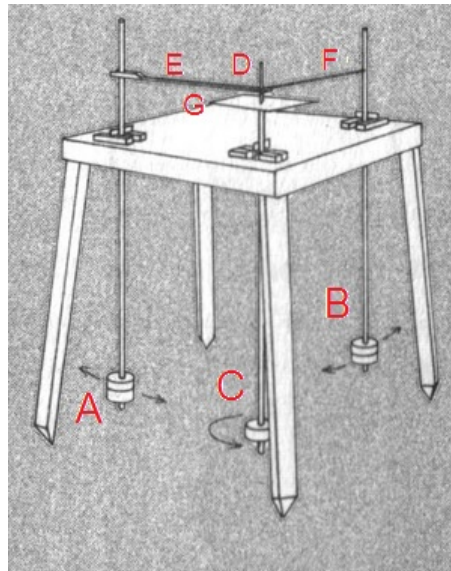


Figura 1.8: Figura adaptada de Harmonógrafo⁴, na qual ilustra o aparato composto por três pêndulos.

⁴Disponível em: <https://brunoixffpotf.wordpress.com/2014/04/10/harmonografo/> Acesso em fev. 2015

Seu sistema é composto por um pêndulo C, que possui seu movimento livre, ele pode completar uma volta em torno de si mesmo e outros dois pêndulos que oscilam simultaneamente A (se move para cima e para baixo) e B (se move para esquerda e para direita), ou seja, quando um se movimentar, automaticamente o outro se moverá também, devido as hastes E e F que os interligam. Na junção destas hastes, temos uma caneta situada em D, que será responsável por reproduzir os movimentos dos três pêndulos, sobre a superfície G.

Portanto, quando os três pêndulos se movimentarem, todos os seus movimentos serão registrados na superfície pela caneta e estas figuras podem ser semelhantes a figuras de Lissajous. Na figura 1.9, temos algumas imagens feitas pelo harmonógrafo compostos por três pêndulos.

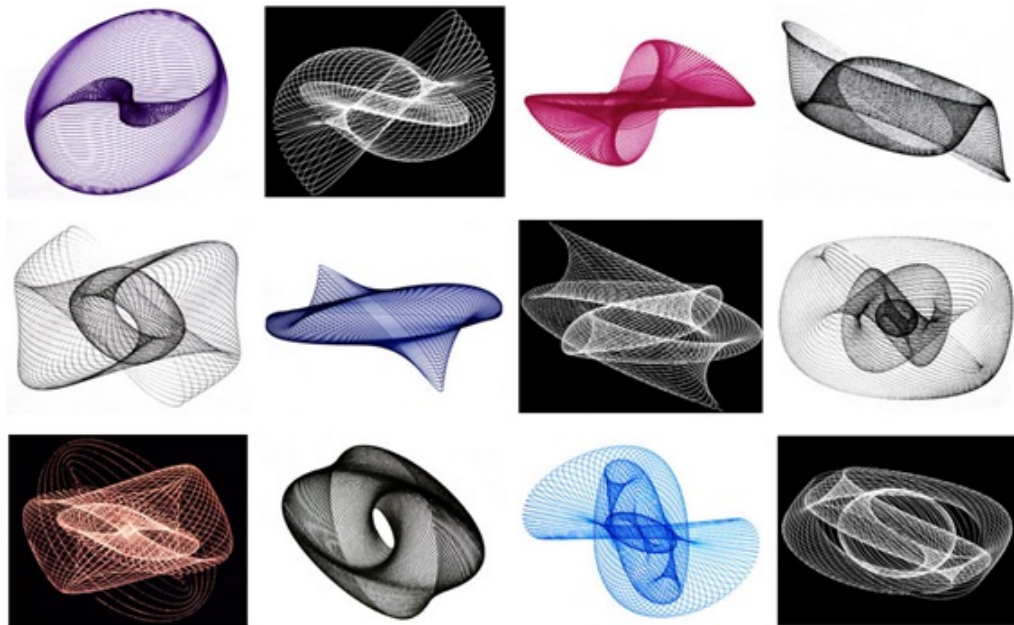


Figura 1.9: Registros feitos por um harmonógrafo composto por três pêndulos movimentando simultaneamente.⁵

⁵Disponível em: (<http://www.karlsims.com/harmonograph/>) Acesso em fev. 2015

Capítulo 2

Harmonógrafo de dois pêndulos

2.1 Funcionamento

O harmonógrafo de dois pêndulos é composto por dois pêndulos **B1** e **B2**, em que **B1** tem o movimento livre e pode ser oscilado na vertical, horizontal e diagonal e **B2** apenas na vertical. Na figura 2.1, apresento um diagrama dos movimentos possíveis dos dois pêndulos.

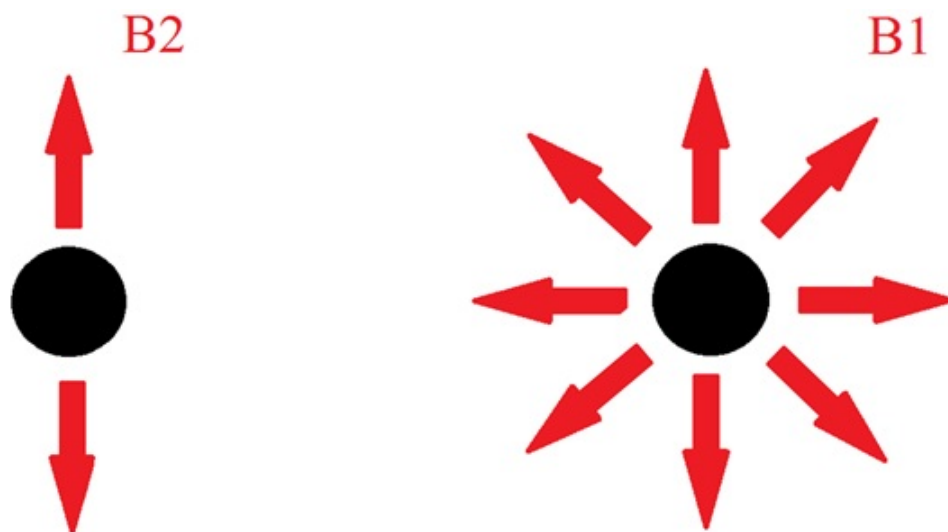


Figura 2.1: Diagrama do movimento dos pêndulos do harmonógrafo.

Vamos considerar que **B1** irá movimentar - se no sentido horizontal e **B2** estará parado. A partir disso, seu funcionamento acontecerá de acordo com a figura 2.2.

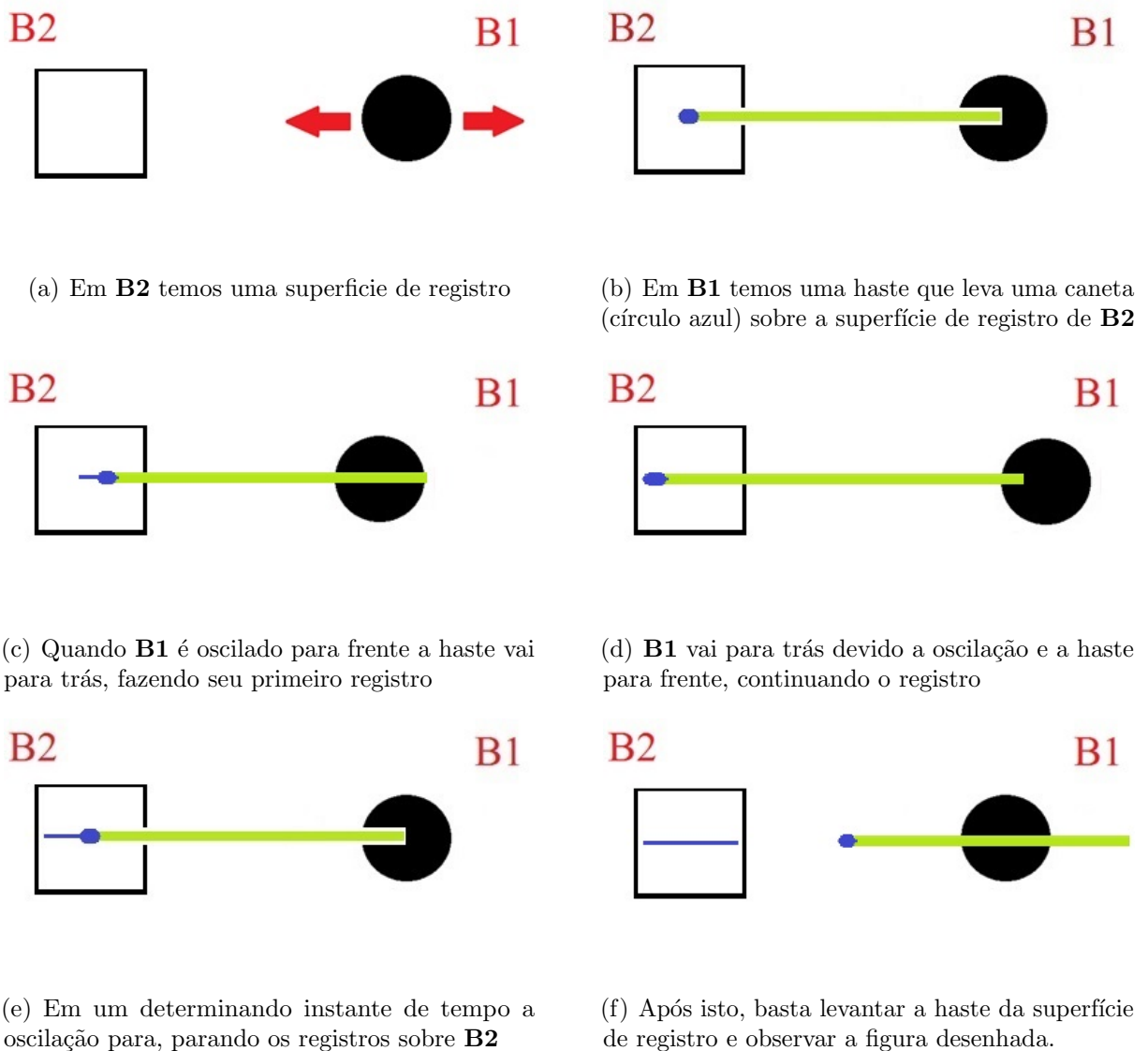


Figura 2.2: Funcionamento e registro de um harmonógrafo de dois pêndulos

Conhecendo o funcionamento de um harmonógrafo de dois pêndulos, será mais fácil acompanhar a evolução da construção do mesmo, que teve aprimoramentos essenciais para melhorar seu desenvolvimento no registro de figuras.

2.2 Construção

Após conhecidos diferentes tipos de harmonógrafos, foi decidido a construção de um aparato de dois pêndulos. Sua versão inicial pode ser observada na figura 2.3.



Figura 2.3: Protótipo do harmonógrafo de dois pêndulos.

Este protótipo foi essencial para o decorrer deste trabalho, pois foi possível a partir dele construir algumas figuras (um exemplo pode ser observado na figura 2.4) e ser o incentivo para futuras melhorias.

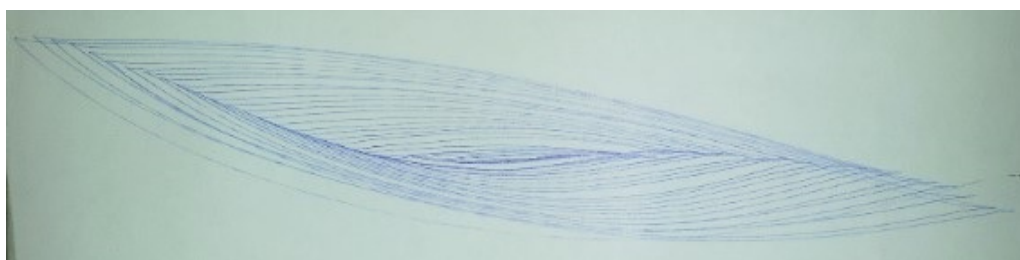
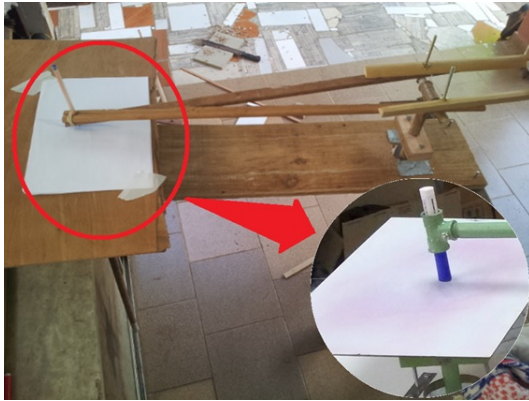
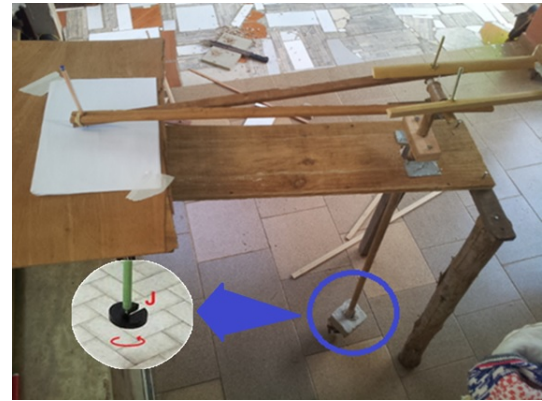


Figura 2.4: Primeiro registro do harmonógrafo de dois pêndulos em sua etapa de construção.

Após estas primeiras impressões sobre o aparato, com algumas figuras de resultados, foram feitas alguns aprimoramentos essenciais para melhorar seu desempenho. Na figura 2.5 relatamos alguns deles.



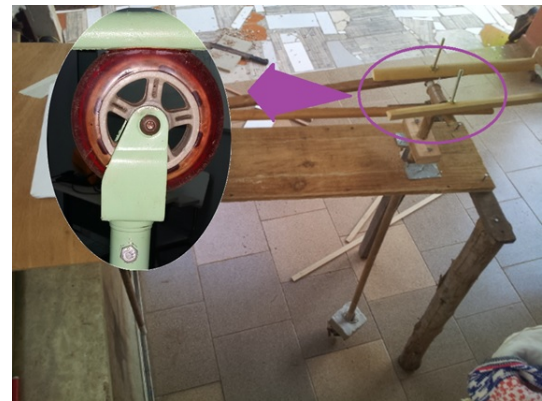
(a) A superfície de registro e a caneta do protótipo apresentavam muito atrito durante os registros, logo foram substituídos por um quadro branco e sua caneta.



(b) Os pesos presos aos pêndulos eram feitos de argila, mas foram substituídos por pesos feitos de cimento em formato de disco.



(c) O suporte para o pêndulo **B1**, foi substituído pelo *gimbal* feito de latão (material de cor dourada na foto), permitindo o movimento livre do mesmo.



(d) A articulação antiga foi substituída por uma roda de patinete, para melhorar o desempenho e manter a caneta sempre na superfície de registro.

Figura 2.5: Modificações feitas durante a construção do harmonógrafo de dois pêndulos

Após essas modificações, entre outras, foi possível chegar a versão final de um harmonógrafo de dois pêndulos para prosseguir as análises do trabalho, que pode ser observada na figura 2.6

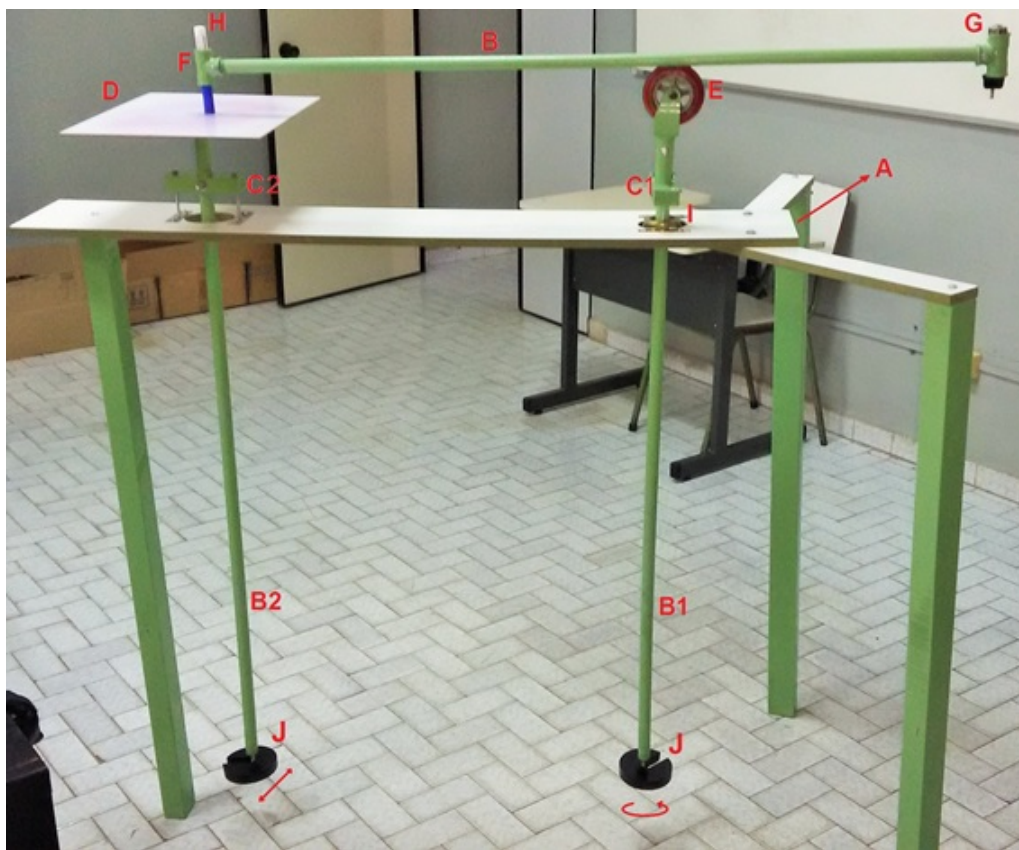


Figura 2.6: Harmonógrafo de dois pêndulos construído nesta pesquisa.

Este harmonógrafo possui uma característica diferente das demais, pois não foi encontrado na revisão bibliográfica um harmonógrafo em que os pêndulos possuíam as características de movimentos iguais aos pêndulos **B1** e **B2**, como citados na seção 2.1, sendo um diferencial do aparato.

Na tabela 2.1 temos alguns materiais que foram utilizados na construção deste aparato.

Tabela 2.1: Tabela de alguns materiais.

Identificação	Materiais	Quantidade
A	Mesa de Suporte	1
B	Cabo de Vassoura	3
C	Suporte de Madeira dos Pêndulo	2
D	Quadro Branco para Registro dos desenhos	1
E	Suporte para Roda de Patinete	1
F	Suporte de PVC da Caneta	1
G	Contra - Peso, feito com PVC	1
H	Caneta Para Quadro Branco Faber Castel	1
I	Gimbal de Latão	1
J	Peso de cimento	2

Os materiais utilizados eram de baixo custo e a maioria simples de encontrar, pois são materiais vistos diariamente ao nosso redor, como cabos de vassouras, por exemplo. Isto implica que é possível construir um harmonógrafo de dois pêndulos para quem tem o interesse no aparato.

O harmonógrafo reproduzido neste trabalho passou por duas configurações. Na configuração I, que foi durante a fase de construção em que envolvia o protótipo (figura 2.3), os pêndulos foram restritos apenas a duas oscilações: enquanto um pêndulo oscilava na horizontal (para frente e para trás) o outro movimentava - se na vertical (para cima e para baixo).

As imagens registradas (figura 2.10) por esse tipo de movimento em diversas vezes testadas, eram muito semelhantes, diferenciando apenas a compressão ou alongamento dos desenhos registrados.

Na configuração II, que foi citada na seção 2.1, foi introduzido ao pêndulo **B1** que possui a caneta **H**, um *gimbal* **I**, que permitia uma oscilação de 0 a 360 graus do mesmo. Portanto, era possível formar algumas imagens diferentes (figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14) do sistema anterior. Neste sistema, as figuras registradas não eram sempre semelhantes, pois além de poder variar a amplitude de oscilação, você poderia variar o sentido do giro. Assim, formavam figuras interessantes, belas e bem diferentes umas das outras. Na seção 2.4, poderão ser observados resultados das duas configurações discutidas nesta seção.

2.3 Problemas encontrados

Durante toda a realização do projeto foram muitos problemas envolvidos, na figura 2.7 será mostrado um dos vários lugares em que foram encontrados alguns empecilhos.

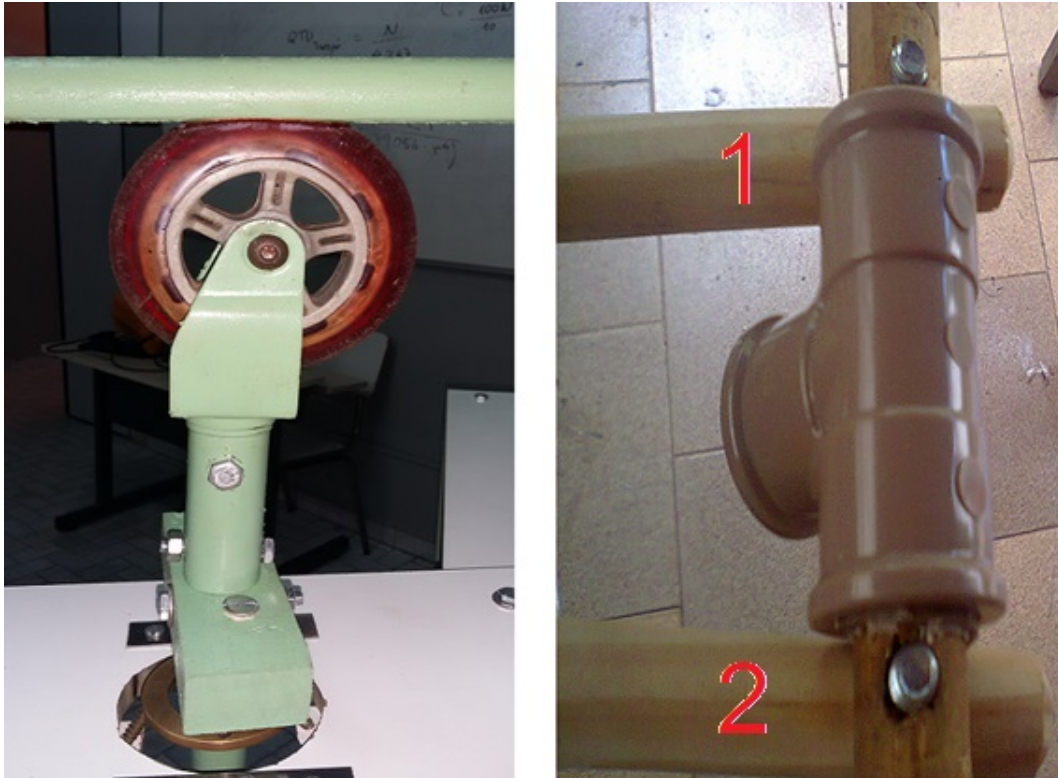


Figura 2.7: Do lado direito temos o sistema na configuração II. Do lado esquerdo, o primeiro sistema de articulação do protótipo utilizado na construção. Estas articulações tem por objetivo fazer com que o braço **B** da figura 2.6 não levante da superfície de desenho.

É possível perceber através da figura 2.7, que o lado esquerdo é o sistema atual utilizado, mas foi o sistema na imagem do lado direito o primeiro processo na construção do mesmo. Quando utilizado a articulação em "T" de PVC as imagens não possuíam curvas suaves durante a formação da figura, pois as madeiras **1** e **2** não eram estáveis e sempre oscilavam dentro do "T" de PVC, mas após a troca deste objeto pelo sistema da roda de patinete e mais seu suporte, este empecilho foi solucionado e não ocorreu mais problemas com a construção das figuras. A figura 2.8 ilustra a comparação entre os resultados obtidos pelos dois sistemas.

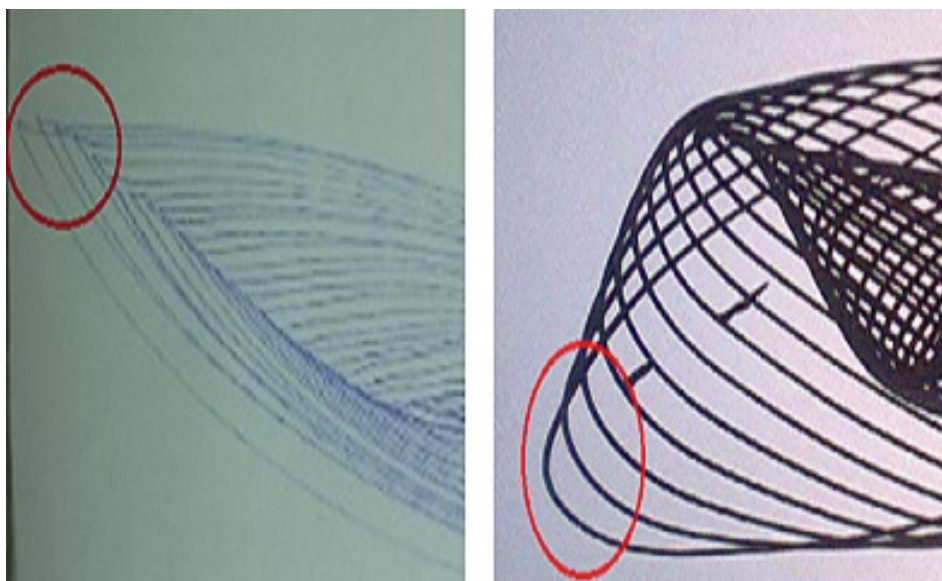


Figura 2.8: À imagem do lado esquerdo representa a situação quando utilizado o sistema do "T" de PVC, já a do lado direito o sistema atual.

Outro problema durante a construção, foi a introdução do *gimbal I* (figura 2.6), o primeiro lugar a possuir o movimento de 0 a 360 graus foi no lado do pêndulo **B2**, mas quando feito isso as imagens não eram tão belas e "contínuas", como pode ser observado na figura 2.9.

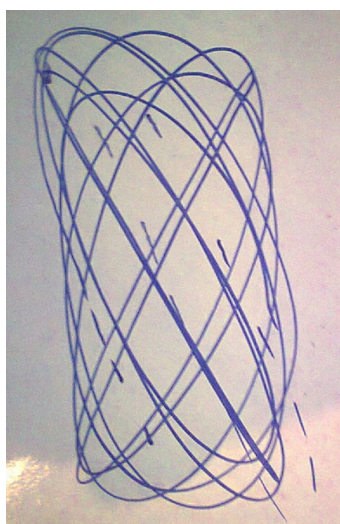


Figura 2.9: Imagem gerada quando o *gimbal* estava em **B2**. A imagem apesar de não ser tão bela esteticamente, possui muitas semelhanças com algumas figuras mostradas no apêndice A.3

Com isso, o *gimbal* foi trocado para o lado do pêndulo **B2** (figura 2.6), que é o estado atual do harmônógrafo.

Apenas alterando a posição do suporte **C1** do pêndulo **B2** (figura 2.6) para o sentido igual a **C2**, também afetava na construção dos desenhos. Voltando a posição

normal novamente, o sistema funcionava normalmente.

Outro empecilho, foi o atrito. Este foi reduzido ao máximo possível, pois foi colocada caneta com menor atrito e quadro branco na superfície de desenho, pois a dissipação seria maior se fosse usada uma caneta esferográfica e uma folha de papel A4. Além do, contra peso **G** colocado no final de **B**.

Após alterado esses problemas, o harmonógrafo pode chegar em seu estado final, como já apresentado na figura 2.6.

2.4 Resultados

Após a montagem e dos estudos dos erros encontrados e aperfeiçoamento do aparato, foram registradas várias imagens, que são resultados desta monografia. Ao observar as figuras abaixo, podem ser vistos vários registros feitos durante todo o trabalho.

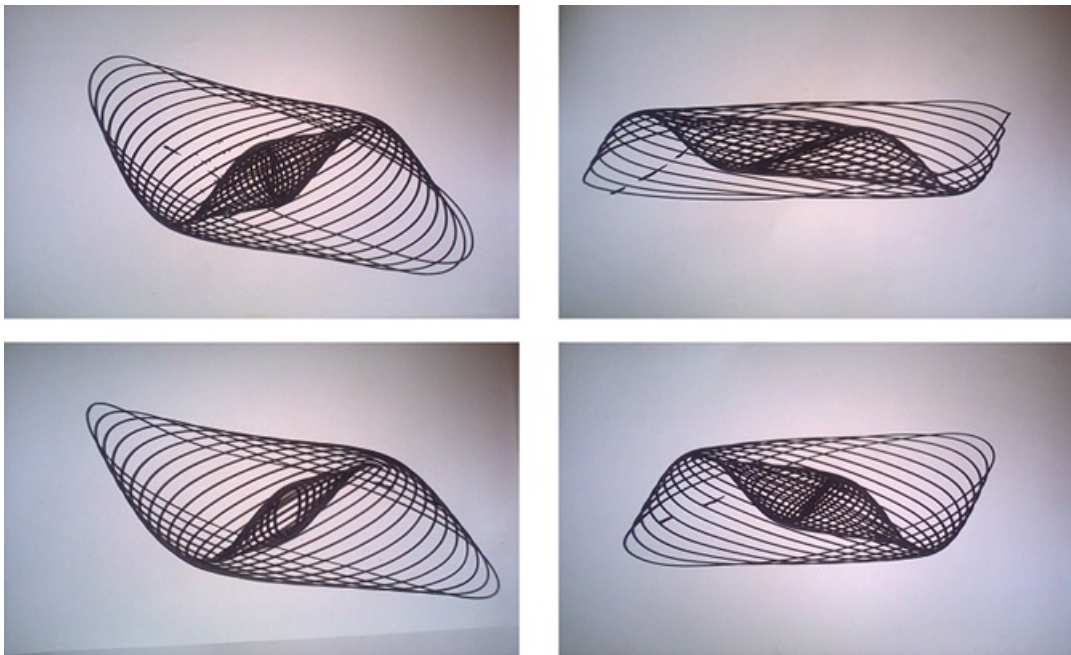


Figura 2.10: Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração I, com restrição de movimentos do pêndulo **B1**. As imagens são semelhantes, variam apenas sua compressão ou alongamento.

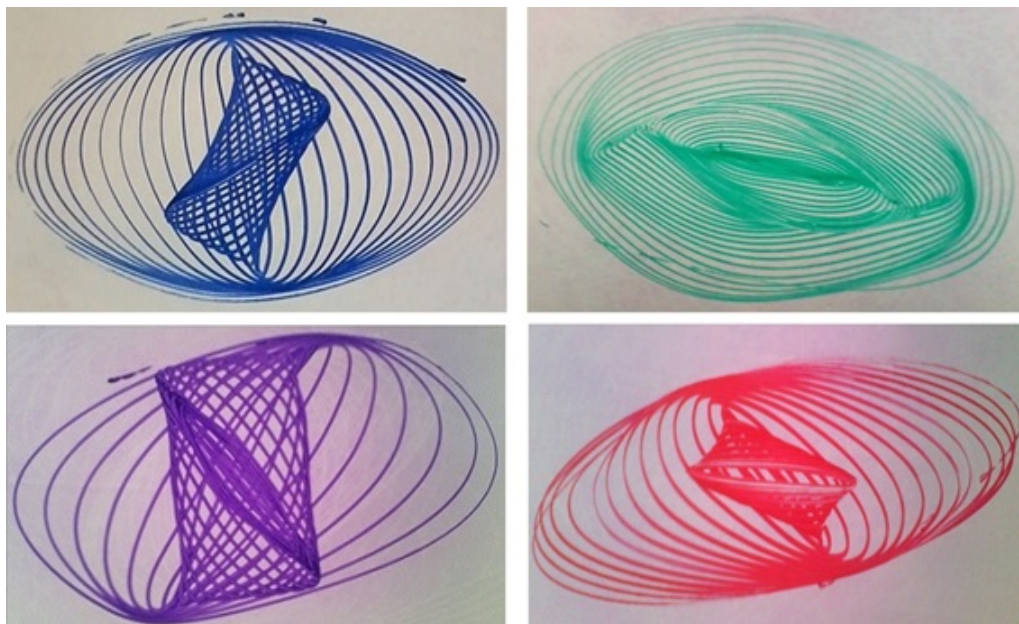


Figura 2.11: Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Neste mosaico as figuras foramadas apresentam um caratér mais elipsoidal.

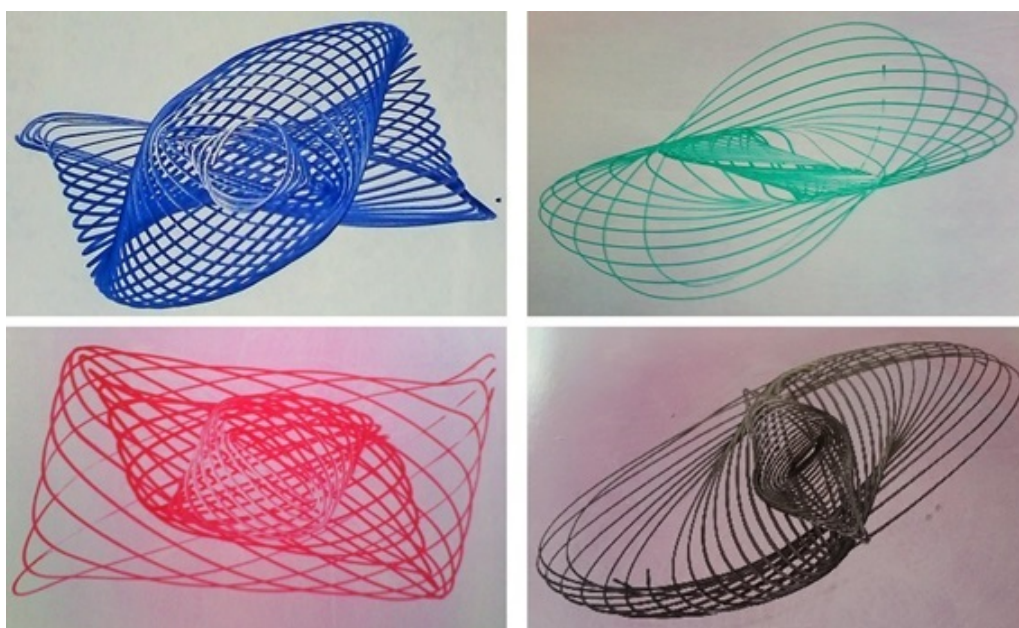


Figura 2.12: Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Pode ser observado que as imagens registradas neste mosaico são diferentes dos mosaicos anteriores, pois o foram feitas utilizando diferentes tipos de manipulações sobre os pêndulos.

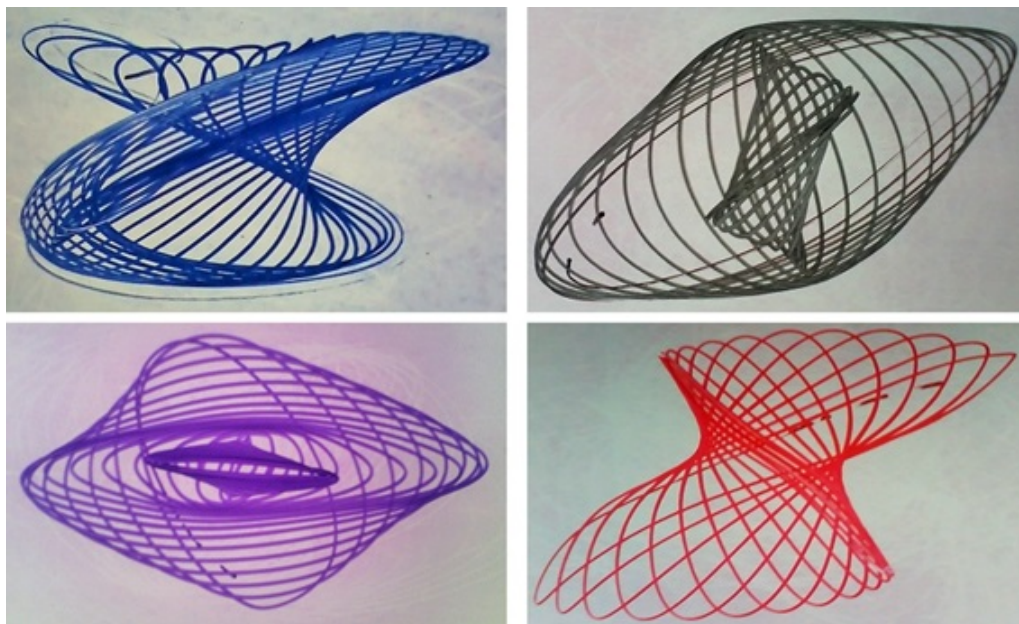


Figura 2.13: Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Neste mosaico existem diferentes estilos de figuras, a primeira figura do mosaico apresenta curvas totalmente diferentes das demais, por exemplo.

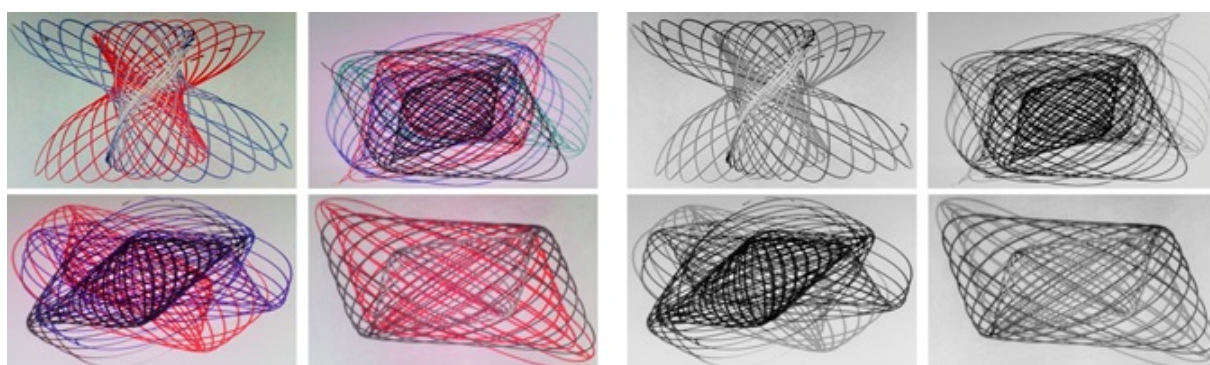


Figura 2.14: Imagens registradas pelo harmonógrafo utilizando a configuração II, quando implementado o movimento de 0 a 360 graus. Nestas figuras existe sobreposição de cores, ou seja, foram feitos registros em cima de registros. Na imagem da direita temos a original e na esquerda a figura foi editada para que assim, pudessem ser vistos os traços de cada desenho melhor.

Capítulo 3

Modelagem e simulação de um harmonógrafo

Existem diversos problemas físicos reais que podem ser modelados matematicamente. Neste trabalho temos a utilização da modelagem matemática quando estamos encontrando o modelo do pêndulo simples, amortecido e o modelo do harmonógrafo de dois pêndulos.

A modelagem matemática é um instrumento para se compreender resultados a partir de concepções teóricas e quantificar os mesmos para poder dar credibilidade ao modelo obtido. É muito comum obter modelos que não satisfazem as condições do objeto de estudo, mas sempre possuem novas considerações a serem feitas, tornando a modelagem matemática um processo cada vez mais próximo de situações reais.

Como foi dito, neste trabalho a modelagem esteve presente durante a modelagem de um harmonógrafo de dois pêndulos, mas pode ocorrer com harmonógrafos em geral. Pelo fato do aparato ser composto por pêndulos e suas imagens são formadas pela sobreposição dos mesmos, podemos interpretar o problema fisicamente e modelar matematicamente.

Modelagem matemática é um processo trabalhoso, mas quando um modelo é obtido é como se tivesse sido feito uma obra de arte, Biembengut (1999, p. 20), como sobre isso dizendo que modelagem matemática:

“Pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador, precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.”

Deixamos claro que, o presente trabalho utilizou esta ferramenta, pois foi essencial para conseguir o modelo final deste harmonógrafo de dois pêndulos. Um diagrama está na figura 3.1, ele representa de forma simples um processo de modelagem matemática.

Quando o modelo não é satisfatório com a previsão sobre o mundo real, ele retorna na primeira etapa, ou seja, é um processo por vezes complicado, sendo necessário sempre rever os modelos. Às vezes, estes ciclos podem nos levar a outros resultados que primeiramente não eram a intenção do estudo.

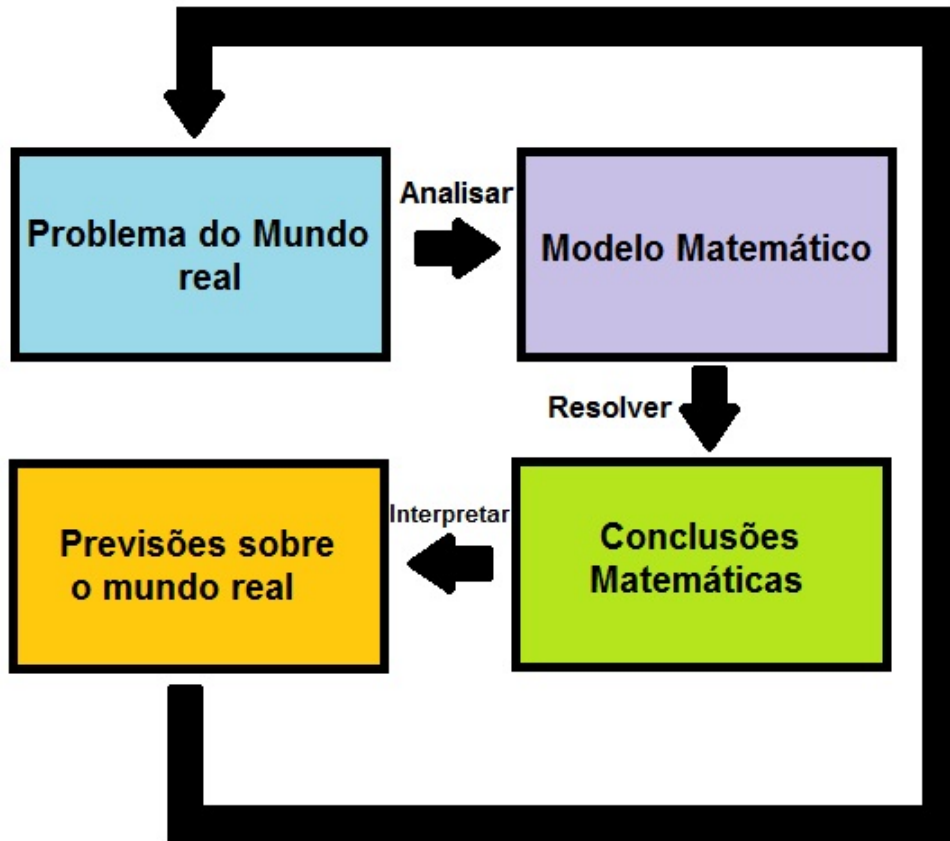


Figura 3.1: Processo de modelagem matemática, figura adaptada de STEWART (2013, p. 22).

3.1 Modelagem de um pêndulo simples

Considerando novamente o pêndulo dibujante (figura 3.2), vamos iniciar nosso processo de modelagem.

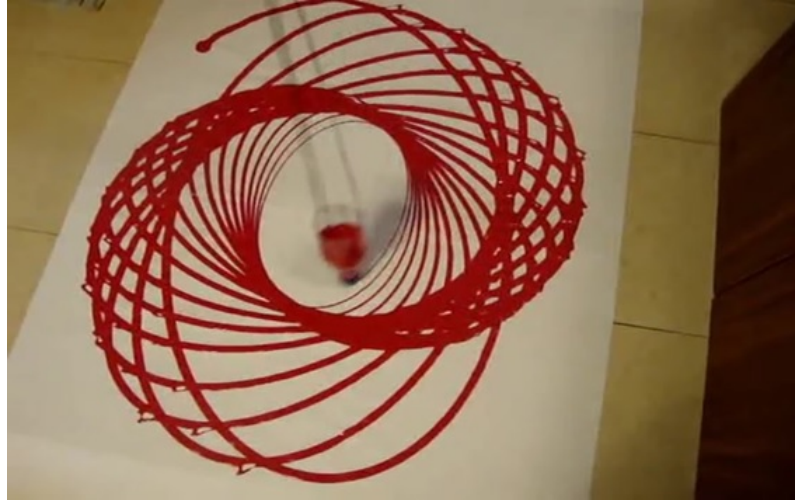


Figura 3.2: Pêndulo dibujante

Este pêndulo após um determinado instante de tempo t vai perdendo tinta para que o desenho geométrico seja feito, além de poder oscilar em todas as direções. Vamos considerar que este pêndulo oscile apenas em uma direção e que sua massa seja constante além de poder oscilar indefinidamente. Estas restrições nos levam a um pêndulo simples (figura 3.3).

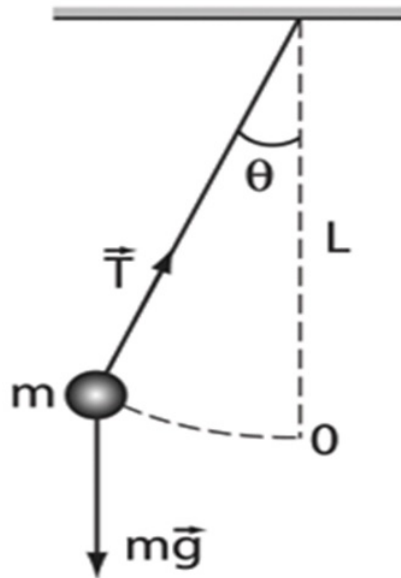
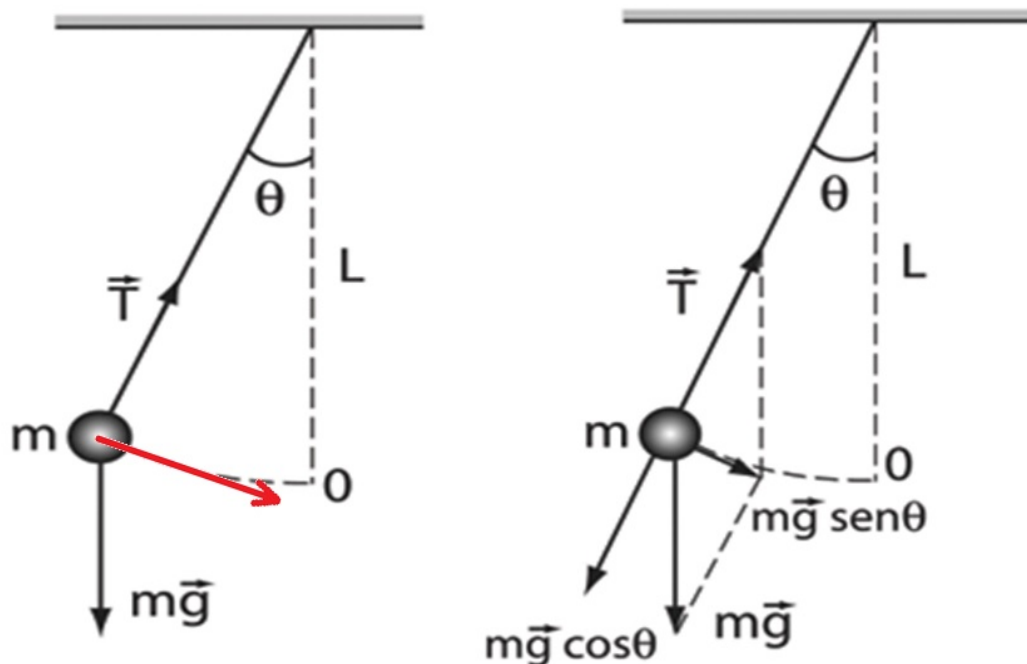


Figura 3.3: Pêndulo simples.

Quando o pêndulo sai da sua posição de equilíbrio, existe uma força restauradora fazendo com que o mesmo retorne à sua posição inicial. Esta força irá atuar na direção representada na figura 3.4 (a) e pode ser encontrada decompondo a força indicada por $m\vec{g}$ (onde m é a massa do presa ao fio e g a aceleração da gravidade) em duas componentes

(figura 3.4 (b)).



(a) A seta em vermelho indica uma força restauradora que faz com o que o pêndulo retorne a posição inicial

(b) Decomposição da força peso.

Figura 3.4: Pêndulo simples e as forças que atuam sobre ele.

Da figura 3.4 (b) retiramos que existiram duas forças em direções diferentes, que podem ser observadas na equação 3.1.

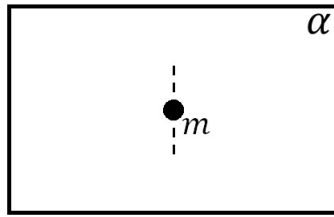
$$\begin{cases} Px = mg \sin \theta \\ Py = mg \cos \theta \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos olhar este sistema de uma maneira diferente agora, em uma vista superior. Ou seja, olhando por essa perspectiva temos apenas um ponto (figura 3.5), que representa a massa m , que está presa ao fio de comprimento L , penudurada em alguma superfície de apoio.

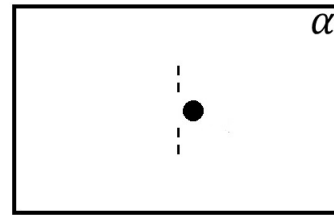


Figura 3.5: Vista superior de um pêndulo simples na posição de equilíbrio.

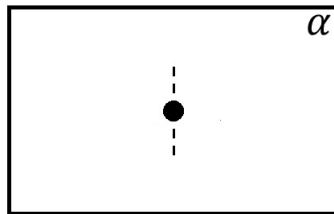
Esta massa m está em um plano, representado pela letra grega α (*alfa*) e oscila em pequenas angulações, como representado na figura 3.6, não saindo do plano *alfa*.



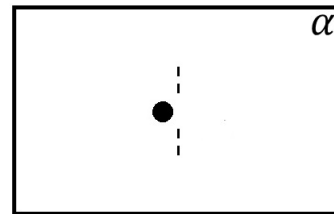
(a) Vista superior do sistema pêndulo simples, onde a massa m está no plano *alfa* e a linha tracejada representa seu ponto de equilíbrio.



(b) Início de uma oscilação do pêndulo, ele oscila com um ângulo θ (*teta*) pequeno.



(c) A massa retorna a posição de equilíbrio.



(d) E novamente oscila, mas na direção contrária e a partir disso o movimento continua indefinidamente.

Figura 3.6: Oscilação de um pêndulo simples visto em uma perspectiva superior.

A partir da figura 3.6 concluímos que, se o pêndulo com pequenos ângulos de oscilações não deixa o plano *alfa*, então seu movimento será unidimensional e considerando o plano cartesiano usual, teremos um movimento no eixo das abscissas. Assim, das forças na equação 3.1 será apenas utilizada a força em Px .

Utilizando a segunda lei de Newton (equação 3.2).

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.2)$$

Em que, o somatório das Forças (F) é igual a massa (m) vezes aceleração (a), podemos obter que:

$$-mg\text{sen}\theta = ma,$$

onde o sinal negativo está relacionado a força Px ser restauradora. Realizando algumas manipulações algébricas e levando em consideração que a aceleração é a derivada segunda da posição e que, a posição tem relação com L e θ , chegamos a equação 3.3.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0. \quad (3.3)$$

Que é uma equação diferencial ordinária não linear (vide apêndice C), devido ao termo $\text{sen}\theta$. Como foi representado na figura 3.6, temos oscilações pequenas, consequentemente θ é muito pequeno. Ou seja, suas oscilações são sempre em torno de zero, sendo válida a aproximação da equação 3.4.

$$\text{sen}\theta \approx \theta. \quad (3.4)$$

Na figura 3.7.

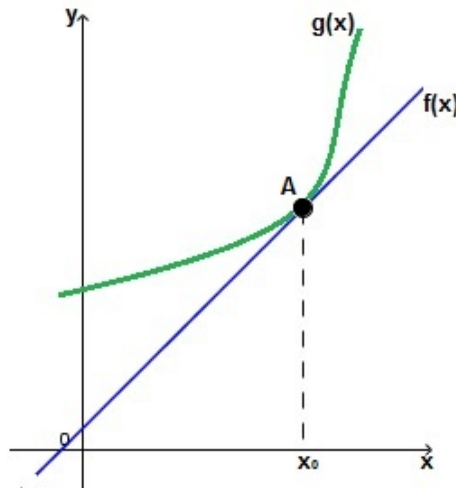


Figura 3.7: Gráfico de duas funções quaisquer $f(x)$ e $g(x)$, com A sendo o ponto em comum entre as duas.

Seja $g(x)$ uma função qualquer e um ponto A de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ sobre ela. Tangente à essa curva e passando por este ponto, temos a reta tangente $f(x)$, que é a equação 3.5

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.5)$$

Como foi comentado na figura 3.6, as oscilações são pequenas e se dão em torno do equilíbrio, que vamos considerar sendo a origem $(0, 0)$ e nosso ponto x_0 , será então igual a 0. Com estas considerações, teremos que em torno de x_0 as funções $f(x)$ e $g(x)$ serão aproximadamente iguais. Então, temos a equação 3.6

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0). \quad (3.6)$$

Esta aproximação chama-se **aproximação linear**. Considerando $x = \theta$, $g(x) = \text{sen}\theta$ e $\theta_0 = 0$ temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta &\approx \text{sen}(0) + \cos(0)(\theta - 0), \\ \text{sen}\theta &\approx 0 + 1(\theta - 0), \\ \text{sen}\theta &\approx \theta, \end{aligned}$$

que é a aproximação da equação 3.4 comentada anteriormente. Então, utilizando esta aproximação, temos a equação 3.7

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad (3.7)$$

que é uma equação diferencial ordinária linear (vide apêndice C), cuja sua solução é a equação solução 3.8 e foi dada em $x(t)$, pois consideramos o movimento unidimensional utilizando a componente em Px do sistema de equações 3.1.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \quad (3.8)$$

Em que, A é amplitude de oscilação, ω sua frequência angular e ϕ seu ângulo de fase.

Na figura 3.8 temos um exemplo desta equação solução de um pêndulo simples.

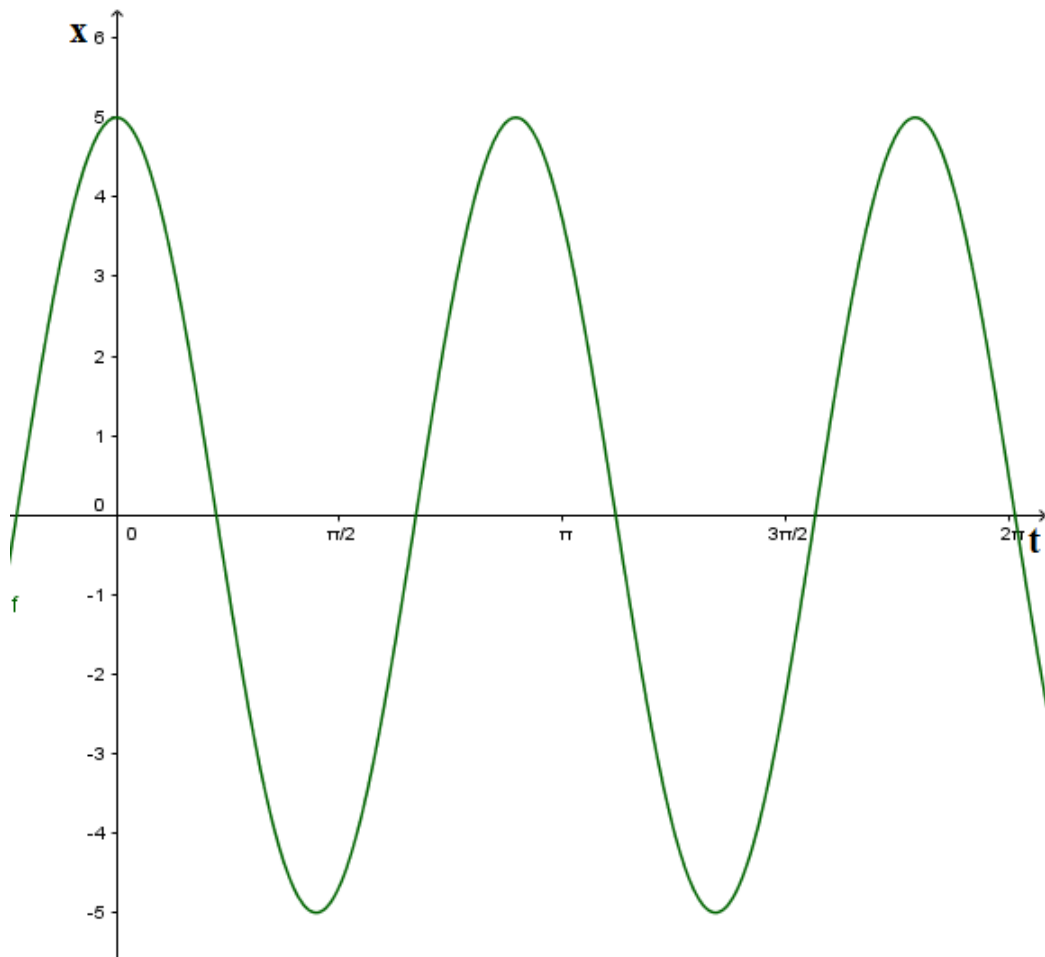


Figura 3.8: Gráfico da oscilação de um pêndulo simples, com os valores de $A = 5$, $\omega = \sqrt{5}$ e $\phi = 0$.

Observando o gráfico produzido por este tipo de pêndulo, percebemos que sua oscilação após um grande intervalo de tempo será a mesma, pois não existe a redução de sua amplitude e não temos nenhuma força dissipativa no sistema. Com isso, este pêndulo

nunca irá parar de oscilar e este gráfico não irá tender a zero. Isto faz com que novas considerações sejam feitas, já que o harmonógrafo de dois pêndulos após um determinado instante de tempo t para suas oscilações.

Voltando ao modelo do pêndulo simples, mas agora considerando a força de atrito, que neste modelo será proporcional à velocidade. Na figura 3.9 exemplificamos isto melhor.



Figura 3.9: Ao andar de carro, quando colocamos nosso braço para fora sentimos uma força contrária ao movimento e esta força aumenta ou diminui proporcionalmente a velocidade em que o carro está. Assim, consideramos, de maneira grosseira, que a força de atrito é proporcional à velocidade. A letra c na figura representa como estamos com a posição de nossa mão, ou seja, quanto maior a área exposta, maior o atrito. Isto é definido através da constante de proporcionalidade c .

Com esta consideração, temos a adição de mais uma força ao sistema do pêndulo, que agora passa a se chamar pêndulo amortecido, devido a força de arrasto (equação 3.9), normalmente conhecida como força de atrito.

$$F_{arrasto} = -cv. \quad (3.9)$$

Em que, F é a força de arrasto, c a constante de proporcionalidade e v a velocidade. Note que existe um sinal negativo, isso se dá devido a força de arrasto ser uma força dissipativa. Como nosso sistema é oscilatório e a posição se dá por θ em função do tempo e a velocidade é a derivada primeira da posição, temos que a equação 3.9, pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_{arrasto} = -c \frac{d\theta}{dt}$$

Na figura 3.10 temos o acréscimo dessa força ao pêndulo simples, agora conhecido como amortecido, devido a essa força acrescentada.

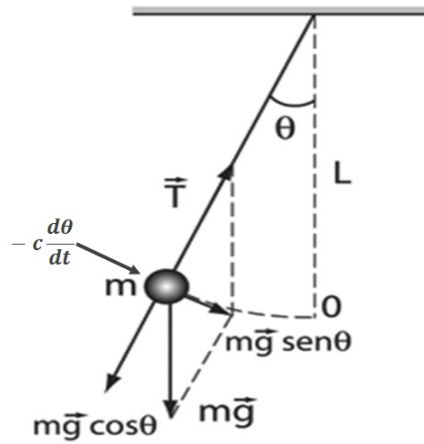


Figura 3.10: Diagrama de um pêndulo amortecido.

Utilizando novamente a segunda lei de Newton (equação 3.2) e adicionando esta força temos:

$$-c \frac{d\theta}{dt} - mg \sin\theta = ma.$$

Realizando algumas manipulações algébricas e já considerando a aproximação de $\sin\theta \approx \theta$, chegamos na equação 3.10.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{mL} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (3.10)$$

Considerando $\beta = \frac{c}{mL}$ e $\omega^2 = \frac{g}{L}$, temos a equação 3.11.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \theta = 0, \quad (3.11)$$

cuja solução é a equação 3.12

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) e^{-\lambda t}. \quad (3.12)$$

Em que, A é amplitude de oscilação, ω sua frequência angular, ϕ seu ângulo de fase e λ o coeficiente de atrito.

Na figura 3.11 temos um exemplo desta equação solução de um pêndulo amortecido.

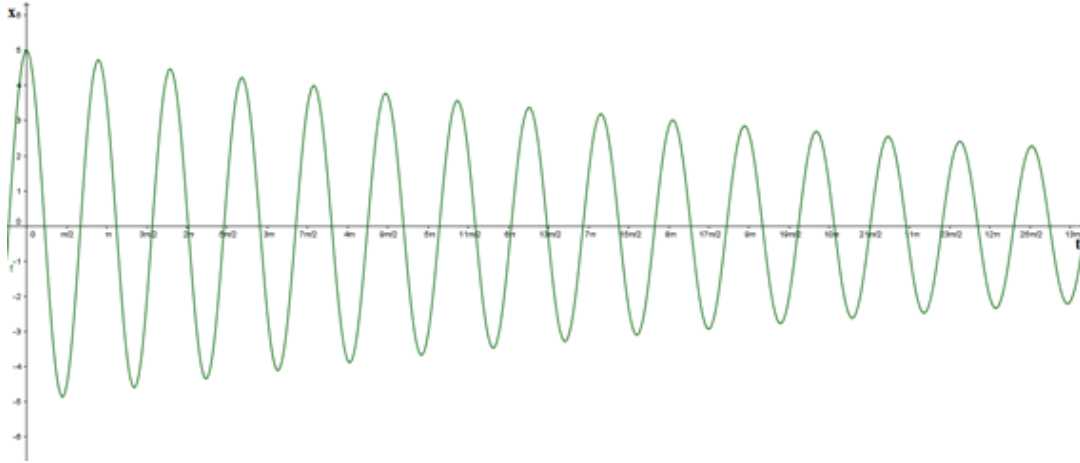


Figura 3.11: Gráfico da oscilação de um pêndulo simples, com os valores de $A = 5$, $\omega = \sqrt{5}$, $\phi = 0$ e $\lambda = \frac{1}{50}$.

O gráfico da figura 3.11 perde sua amplitude com o decorrer do tempo, até ir a 0, o que deixa o modelo mais próximo do que ocorre com o harmonógrafo de dois pêndulos, visto que depois um determinado tempo t o mesmo para. Ainda em relação ao gráfico da figura 3.11, ocorrem oscilações, ou seja, existe a presença de movimentos harmônicos. Isto significa que, podemos melhorar ainda o entendimento de um harmonógrafo, pois da palavra **harmon**, temos o prefixo de harmônico e **grafo** o sinônimo de grafia. O que implica, que o nome harmonógrafo está relacionado a uma grafia harmônica.

3.2 Modelo do harmonógrafo de dois pêndulos

Da seção anterior, seguimos passo a passo a modelagem de um pêndulo simples e em seguida um pêndulo amortecido. Com isso, nosso modelo se torna cada vez mais próximo de um harmonógrafo de dois pêndulos. No aparato, temos um sistema de pêndulos, ou seja, dois pêndulos oscilando ao mesmo tempo e interligados. Sendo necessário mais algumas considerações.

Quando existem movimentos oscilatórios interligados, temos um sistema de movimentos, chamado de sistema acoplado. Existem muitos exemplos de sistemas acoplados, por exemplo, na figura 3.12 é mostrado um utilizando metrônomos⁶.

⁶Disponível em: (<https://www.youtube.com/watch?v=L.Q1XHutqe0>) Acesso em nov. 2015.



(a) Os metrônomos estão oscilando em fases diferentes.



(b) O sistema é acoplado utilizando as latas indicadas pelo círculo vermelho.



(c) Após acoplado e passado um determinado instante de tempo t o sistema de metrônomos ficam em mesma fase.

Figura 3.12: Metrônomos acoplados

No harmonógrafo de dois pêndulos, o acoplamento é entre a caneta e a superfície de registro representado na figura 3.13.

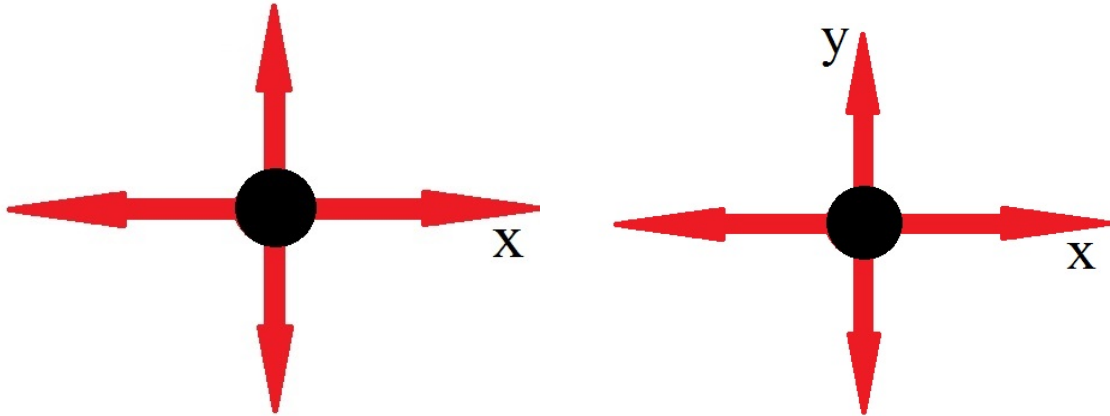


Figura 3.13: O círculo vermelho indica onde existe o acoplamento do sistema.

A equação característica deste sistema é a equação 3.13.

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) e^{-\lambda_1 t} + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) e^{-\lambda_2 t} \\ y(t) = A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) e^{-\lambda_3 t} \end{cases} \quad (3.13)$$

Esta equação 3.13 pode ser compreendida facilmente analisando os movimentos dos pêndulos separadamente, que já foram comentados na seção 2.1, figura 2.1. Veja nas figuras 3.14 e 3.15 como foi obtido o modelo, começando pela análise de **B1**.



(a) Utilizando o plano cartesiano usual e considerando o movimento na horizontal sendo o eixo das abscissas. Temos em relação a x : uma amplitude A_1 , uma frequência angular ω_1 , um ângulo de fase ϕ_1 e um coeficiente de atrito λ_1

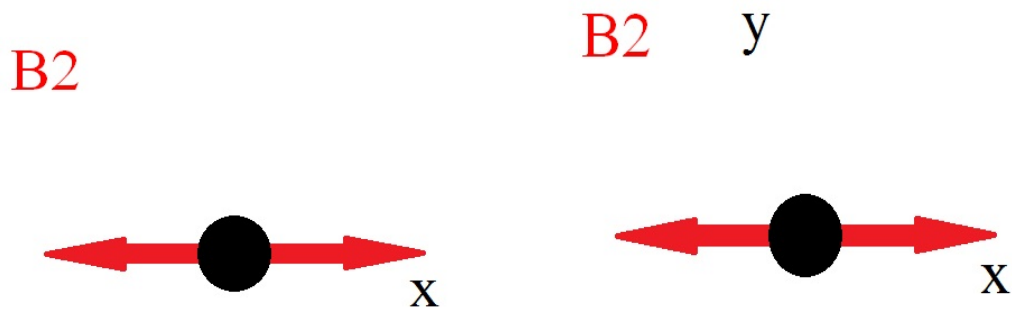
(b) Considerando agora em relação a y , temos: uma amplitude A_3 , uma frequência angular γ_3 , um ângulo de fase ϕ_3 e um coeficiente de atrito λ_3

Figura 3.14: Análise do pêndulo **B1**

Após as considerações da figura 3.14, temos a primeira parte do sistema 3.13.

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) e^{-\lambda_1 t} \\ y(t) = A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) e^{-\lambda_3 t} \end{cases} \quad (3.14)$$

Analisando o pêndulo **B2** (figura 3.15)



(a) Utilizando o plano cartesiano usual e considerando o movimento na horizontal sendo o eixo das abscissas. Temos em relação a x : uma amplitude A_2 , uma frequência angular ω_2 , um ângulo de fase ϕ_2 e um coeficiente de atrito λ_2

(b) Considerando agora em relação a y , não temos nenhum parâmetro, já que é característico desse Harmonógrafo de dois pêndulos o pêndulo **B2** não oscilar no eixo das ordenadas.

Figura 3.15: Análise do pêndulo **B2**

Apenas com a análise do pêndulo **B2**, temos a equação 3.15, somente em $x(t)$

$$\begin{cases} x(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) e^{-\lambda_2 t} \\ y(t) = - - - - - \end{cases} \quad (3.15)$$

Da equação 3.14 e 3.15, temos a equação característica do movimento de um harmonógrafo de dois pêndulos 3.13, que foi citada anteriormente.

3.3 Simulação e comparações entre modelos teóricos e experimentais

Com o modelo do harmonógrafo de dois pêndulos é possível simular este resultado em algum programa computacional, durante o levantamento bibliográfico, foi encontrado em um blog⁷ um código computacional que serviu como apoio para a modelagem do aparato deste trabalho.

Ao iteragir com o código, foi observado algumas diferenças nas linhas de programação, que diferiam do modelo apresentado neste trabalho, como por exemplo, a equação 3.16. Em seu termo $y(t)$, era utilizado a soma de dois termos. O que nos possibilitou entender que, quando construído o código, o movimento considerado de ambos os pêndulos do aparato, tinham movimento livre, ou seja, de 0 a 360 graus, mas isto não ocorreu com o desta pesquisa.

Assim, foi modificado de acordo com a equação 3.13 e implementado no

⁷<http://mamismd.blogspot.com.br/2014/11/vp-ii-harmonografo.html>

código feito em *Processing*. Após estas alterações, os resultados foram bem significativos visualmente e podem ser observados nas figuras 3.16, 3.17 e 3.18. Veja que as imagens da esquerda A, B e C foram construídas computacionalmente (*Processing*), já A', B' e C' foram geradas pelo aparato em sua configuração II.

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) e^{-\lambda_1 t} + A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) e^{-\lambda_2 t} \\ y(t) = A_3 \text{sen}(\omega_3 t + \phi_3) e^{-\lambda_3 t} + A_4 \text{sen}(\omega_4 t + \phi_4) e^{-\lambda_4 t} \end{cases} \quad (3.16)$$

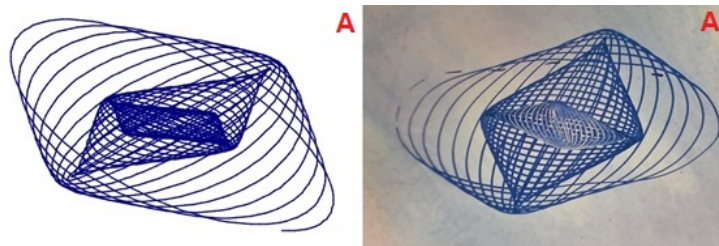


Figura 3.16: Primeira imagem simulada em (*Processing*) e comparada com o modelo feito pelo harmonógrafo em sua configuração II.

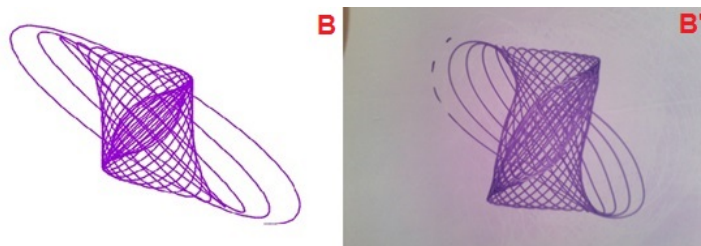


Figura 3.17: Segunda imagem simulada em (*Processing*) e comparada com o modelo feito pelo harmonógrafo em sua configuração II.

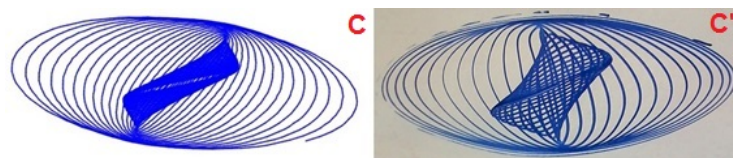


Figura 3.18: Terceira imagem simulada em (*Processing*) e comparada com o modelo feito pelo harmonógrafo em sua configuração II.

O novo código da simulação deste harmonógrafo, os valores dos parâmetros de cada figura simulada acima, estão no apêndice B.

Capítulo 4

Considerações Finais

No decorrer de toda esta monografia, observa-se que o harmonógrafo além de um aparato mecânico capaz de produzir lindas figuras artísticas, pode ser um excelente objeto de estudo matemático. Devido aos pêndulos nele presente, podemos modelar as imagens produzidas por este aparato e expor aos estudantes de nível superior uma aplicação matemática e aos alunos de ensino médio e fundamental, a matemática em toda parte, por ser um material lúdico.

Não podemos esquecer que os resultados mostrados através das simulações são de suma importância para todos aqueles que se interessam em matemática aplicada, pois é uma excelente experiência a modelagem de seus resultados fidedignos através das simulações computacionais, como foi observado no capítulo 3. Portanto, esta monografia pode ser também, muito interessante para o público em geral, pois fica evidente uma aplicação direta desta disciplina.

Apêndice A

Figuras de Lissajous

Existem muitos nomes que fizeram história na Física, como Newton com seus estudos sobre mecânica e o desenvolvimento do Cálculo, Albert Einstein com a teoria da relatividade, entre outros. Temos também Jules Antoine Lissajous (1822-1880), tendo seu nome conhecido por estudantes através de suas conhecidas figuras A.3, que levam seu nome em sua homenagem (MAOR, 2002, p. 145)

James Dean, que foi professor de Matemática e Filosofia Natural na Universidade de Vermont, publicou em 1815 uma análise do movimento da lua sobre a terra. (WHITAKER, 2004, p. 401) Nesse estudo ele observou que este movimento era similar ao de um pêndulo pendurado em Y (figura A.1).

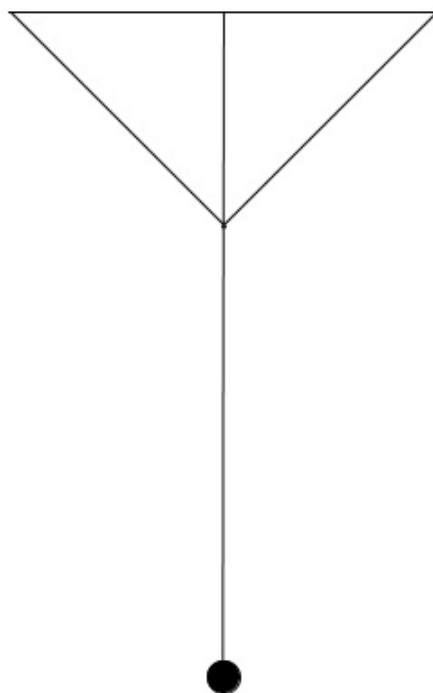


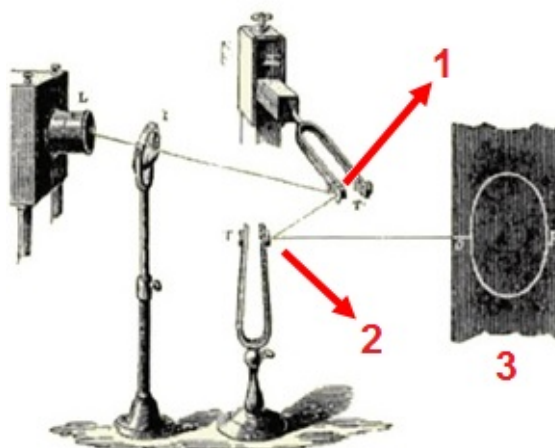
Figura A.1: Pêndulo suspenso em Y de James Dean. A descrição de seu movimento pode ser encontrada em Whitaker (2004, p. 402)

Nesse mesmo ano, Nathaniel Bowditch⁸ estendeu a ideia do pêndulo suspenso em Y e detalhou matematicamente a análise daqueles movimentos.(WHITAKER, 2004, p. 402), mas foi Lissajous quem conseguiu reproduzir visivelmente estas figuras, através do seu aparato, que será descrito mais abaixo. Como os estudos se iniciaram com Bowditch, estas "figuras de Lissajous" também podem ser encontradas na literatura como "Curvas de Bowditch".

Lissajous (figura A.2 (a)) nasceu em Versailles-França em 4 de março de 1822, seus estudos em vibrações e sons ocorreram só em 1841 quando se tornou professor de Física na Lycée Saint-Louis em Paris. Em 1855 ele elaborou um simples experimento ótico para estudar vibrações. Veja a figura A.2 (b), um pequeno espelho **1** está preso em um diapasão, isto proporciona uma vibração ao feixe de luz em uma determinada direção. O mesmo feixe continua sua trajetória focado em outro espelho **2**, fornecendo mais uma direção de vibração diferente da primeira, formando as figuras no anteparo **3** posicionado no final do experimento.(CENA; PEREIRA; PEREIRA, 2014, p. 2302-2)



(a) Jules A. Lissajous



(b) Montagem experimental de Lissajous para estudo de sons, utilizando dois diapasões como fontes de oscilação e feixe de luz.

Figura A.2: Jules A. Lissajous e seu experimento (CENA; PEREIRA; PEREIRA, 2014, p. 2302-2), imagem adaptada.

Com o resultado desta configuração (figura A.2 (b)) foi possível projetar o feixe de luz em um anteparo e visualizar um padrão bidimensional, feito a partir da combinação de duas vibrações (CENA; PEREIRA; PEREIRA, 2014, p. 2302-3). Essa simples ideia de Lissajous, foi a grande precursora para a invenção do osciloscópio. Até então, o estudo

⁸Nathaniel Bowditch nasceu em 26 de Março de 1773, em Salem, Massachusetts – EUA. Faleceu em 16 de Março de 1838. Disponível em: <<http://global.britannica.com/EBchecked/topic/76106/Nathaniel-Bowditch>> Acesso em jan. de 2015

do som dependia do processo de audição, mas com Jules e seu aparato foi possível “ver o som” (MAOR, 2002, p. 145). A partir dos estudos de Lissajous, podemos através de osciloscópios visualizar não só suas figuras (figura A.3), mas ondas senoidais, atratores caóticos entre outras.

A figura A.3 representa algumas figuras de Lissajous, o modelo para obter estas figuras está descrito na equação A.1.

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \\ y(t) = A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Em que A_1 e A_2 são as amplitudes de oscilação, ω_1 e ω_2 frequências angulares e ϕ_1 e ϕ_2 ângulos de fase. Podemos perceber que esta equação apresenta semelhanças com a equação 3.13, isto implica que, as figuras registradas pelo harmonógrafo, são figuras de Lissajous, mas elas apresentam diferenças com as figuras do modelo da equação A.1 devido ao termo $e^{-\lambda t}$ presente na equação 3.13.

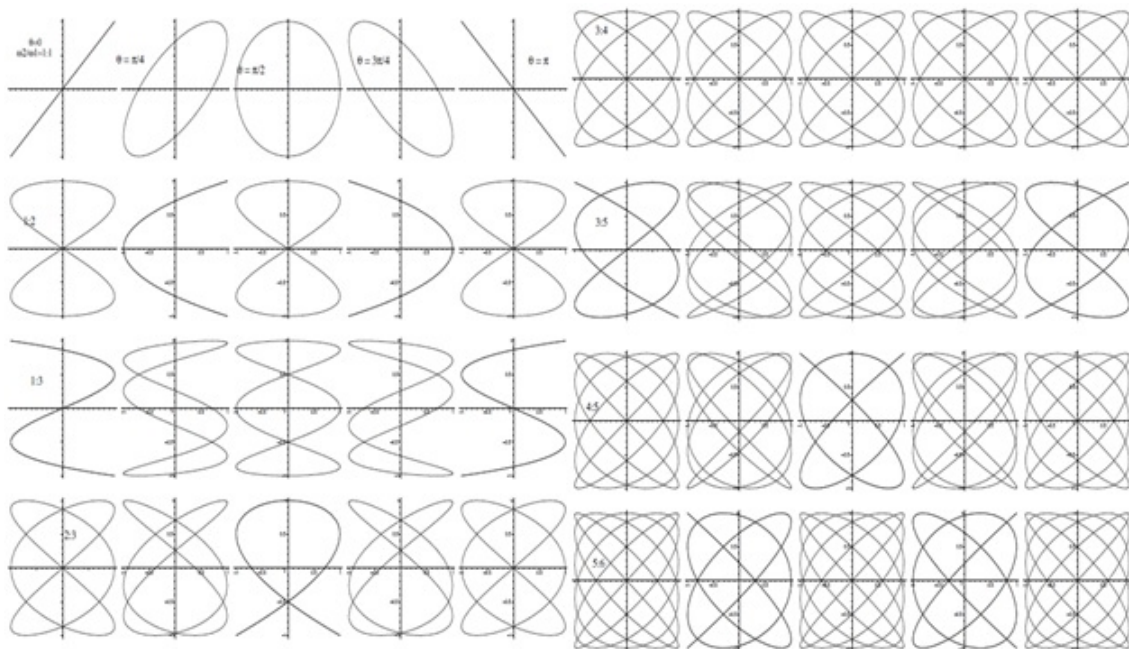


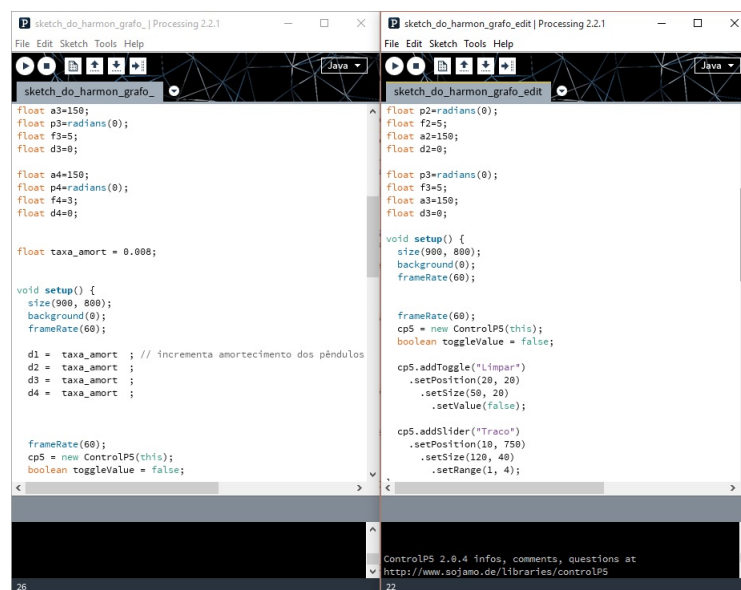
Figura A.3: Figuras de Lissajous retiradas de Andrade e Campos (2005, p. 590)

Apêndice B

Código das simulações e valores dos parâmetros

Antes de mostrar o novo código e apresentar os valores dos parâmetros utilizados nas simulações expostas no capítulo 3, nada mais justo que comentar sobre *Processing*, que é um programa open source e foi criado em 2001 por estudantes do Massachusetts Institute of Technology, para pessoas que querem programar. Pode ser usado por programadores iniciantes, artistas, arquitetos e até mesmo por hobby (SHIFFMAN, 2008, p. 11). Como foi dito, foi através deste programa que foram simulados os resultados.

O novo programa apresenta a equação 3.13. Além de, cada taxa de amortecimento ser estipulada separadamente. Na figura B.1 e figura B.2 aparecem algumas modificações realizadas, na própria interface do *Processing*:



```
sketch_do_harmon_grafo | Processing 2.2.1
File Edit Sketch Tools Help
sketch_do_harmon_grafo
float a3=150;
float p3=radians(0);
float f3=5;
float d3=0;

float a4=150;
float p4=radians(0);
float f4=3;
float d4=0;

float taxa_amort = 0.008;

void setup() {
  size(900, 800);
  background(0);
  frameRate(60);

  d1 = taxa_amort ; // incrementa amortecimento dos pêndulos
  d2 = taxa_amort ;
  d3 = taxa_amort ;
  d4 = taxa_amort ;

  frameRate(60);
  cp5 = new ControlPS(this);
  boolean toggleValue = false;
}

sketch_do_harmon_grafo_edit | Processing 2.2.1
File Edit Sketch Tools Help
sketch_do_harmon_grafo_edit
float p2=radians(0);
float f2=5;
float a2=150;
float d2=0;

float p3=radians(0);
float f3=5;
float a3=150;
float d3=0;

void setup() {
  size(900, 800);
  background(0);
  frameRate(60);

  frameRate(60);
  cp5 = new ControlPS(this);
  boolean toggleValue = false;

  cp5.addToggle("Limpar")
    .setPosition(20, 20)
    .setSize(50, 20)
    .setValue(false);

  cp5.addSlider("Traco")
    .setPosition(10, 750)
    .setSize(120, 40)
    .setRange(1, 4);
}

ControlPS 2.0.4 Infos, comments, questions at
http://www.sojamo.de/libraries/controlPS
```

Figura B.1: Do lado esquerdo temos o código retirado do site já citado no capítulo 3 e do lado direito o novo código sem a taxa de amortecimento fixa.

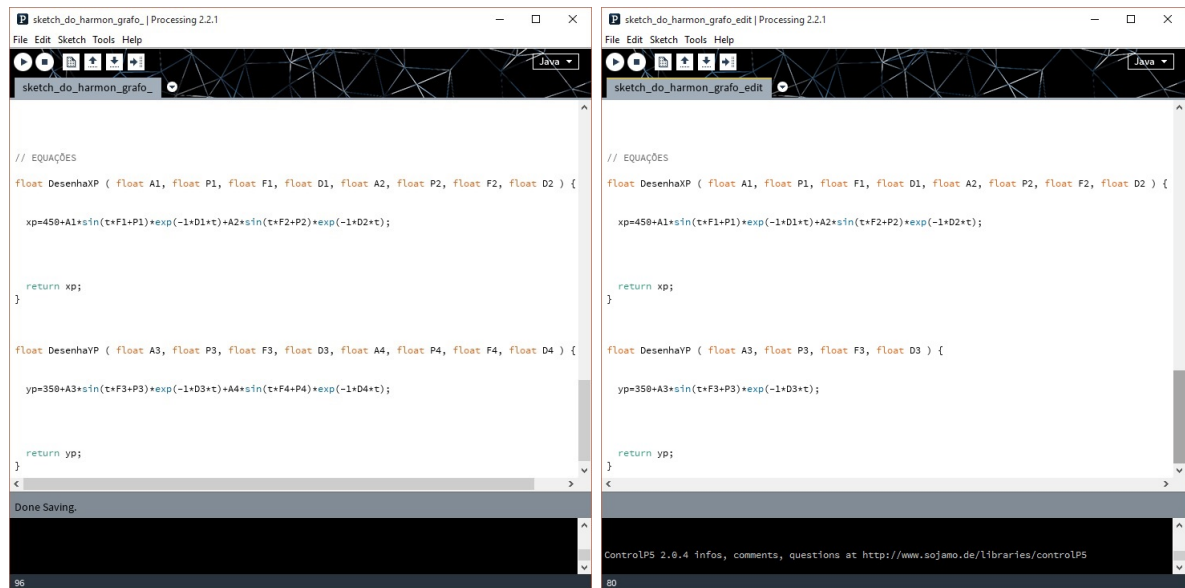


Figura B.2: Do lado esquerdo temos o código retirado do site já citado no capítulo 3 e do lado direito o novo código, onde $y(t)$ possui só o valor de parâmetro em relação ao pêndulo que oscila de 0 a 360 graus.

Como foi retirado um termo da equação em $y(t)$ alguns valores de parâmetros foram apagados no programa, mas deixei evidenciado apenas as equações modeladas nesta pequisa.

Após algumas modificações nas linhas de programação, note nas figuras B.3, B.4 e B.5 os valores de parâmetros referentes as imagens simuladas no capítulo 3.

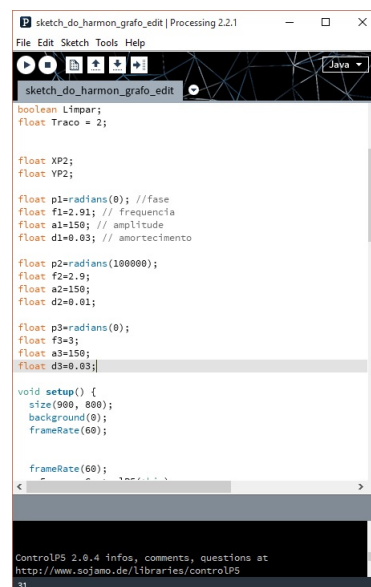


Figura B.3: Valores dos Parêmetros referente a figura 3.16 do capítulo 3

```
sketch_do_harmon_grafo_edit | Processing 2.2.1
File Edit Sketch Tools Help
sketch_do_harmon_grafo_edit
float Traco = 2;

float XP2;
float YP2;

float p1=radians(0); //fase
float f1=3.1; // frequencia
float a1=150; // amplitude
float d1=0.03; // amortecimento

float p2=radians(100000);
float f2=3;
float a2=150;
float d2=0.1;

float p3=radians(0);
float f3=3;
float a3=150;
float d3=0.03;

void setup() {
  size(900, 800);
  background(8);
  frameRate(60);

  frameRate(60);
  cp5 = new ControlPS(this);
}

ControlPS 2.0.4 Infos, comments, questions at
http://www.sojamo.de/libraries/controlPS
10
```

Figura B.4: Valores dos Parâmetros referente a figura 3.17 do capítulo 3

```
sketch_do_harmon_grafo_edit | Processing 2.2.1
File Edit Sketch Tools Help
sketch_do_harmon_grafo_edit
float Traco = 2;

float XP2;
float YP2;

float p1=radians(0); //fase
float f1=2.999; // frequencia
float a1=150; // amplitude
float d1=0.03; // amortecimento

float p2=radians(100000);
float f2=2.956;
float a2=200;
float d2=0.01;

float p3=radians(0);
float f3=2.9999;
float a3=150;
float d3=0.03;

void setup() {
  size(900, 800);
  background(8);
  frameRate(60);

  frameRate(60);
  cp5 = new ControlPS(this);
}

ControlPS 2.0.4 Infos, comments, questions at
http://www.sojamo.de/libraries/controlPS
11
```

Figura B.5: Valores dos Parâmetros referente a figura 3.18 do capítulo 3

No programa foi mudado também as cores das linhas das figuras, para que ficassem mais semelhantes ainda em relação as registradas pelo aparato, mas isso foi apenas para fins estético e então será deixado de lado, visto que possuem tabelas de cores em *Processing* disponíveis na internet.

Apêndice C

Equações diferenciais ordinárias e osciladores harmônicos

Durante o capítulo 3 foi comentado sobre equações diferenciais ordinárias durante a obtenção do modelo do harmonógrafo de dois pêndulos. Na matemática temos essa importante ferramenta, pois essas equações são o suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia (ZILL; CULLEN, 2001, p. 1).

O pêndulo simples é modelado a partir de análises físicas do problema, que é descrito por um modelo matemático. O primeiro modelo é apresentado na equação 3.3, como comentado é uma equação diferencial ordinária não linear devido ao termo $\text{sen}\theta$, mas após a consideração de que $\text{sen}\theta \approx \theta$, este novo modelo (equação 3.7) passa a ser uma equação diferencial ordinária linear.

Então, considere uma equação diferencial ordinária C.1 qualquer.

$$F(t, y, y', \dots, y^n) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Ela será dita linear se F é uma função linear de variáveis $(y, y', \dots, y^{(n)})$, escrita de acordo com a equação C.2.

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y^{(1)} = g(t). \quad (\text{C.2})$$

Portanto, equações que não satisfazem estas características são ditas não-lineares, como o primeiro modelo obtido do pêndulo simples, por exemplo.

C.1 Movimento harmônico simples

Movimentos harmônicos ocorrem em diversos sistemas da ciência. Como mecânicos, elétricos e biológicos. Muitos modelos são obtidos a partir da simples interpretação de um sistema constituído por uma massa ligada a uma mola (BOYCE; DIPRIMA, 2006, p. 196). A figura C.1 apresenta um exemplo deste sistema.

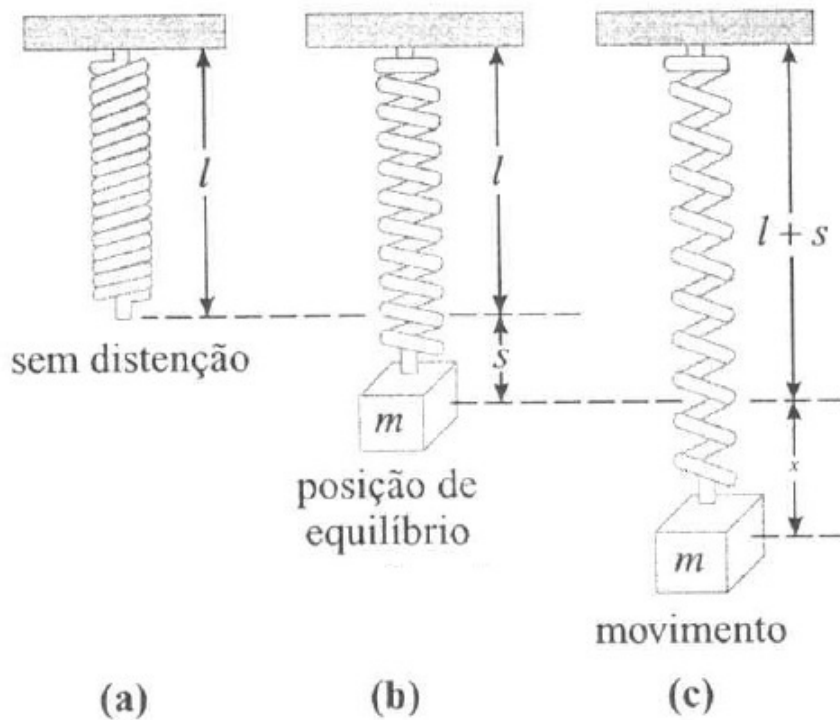


Figura C.1: Respectivas posições de um exemplo de movimento oscilatório simples e em condições ideais, ou seja, sem atrito. Em (a) temos a mola em seu estado de repouso. Em (b) temos uma posição de equilíbrio, quando uma massa m é presa em sua extremidade e em (c) quando ocorre uma pequena perturbação no sistema, tirando-o de seu estado de equilíbrio. Figura adaptada de (ZILL; CULLEN, 2001, p. 227).

De acordo com a segunda Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{C.3})$$

mas aceleração é a derivada segunda da posição, logo:

$$\sum \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \quad (\text{C.4})$$

Temos também a Lei de Hooke:

$$F_{mola} = -ks. \quad (\text{C.5})$$

Em que, F_{mola} representa a força, k é chamada de constante elástica e s uma distância qualquer de deslocamento. A partir disto, vamos analisar o problema através do diagrama de corpo isolado (figuraC.2).

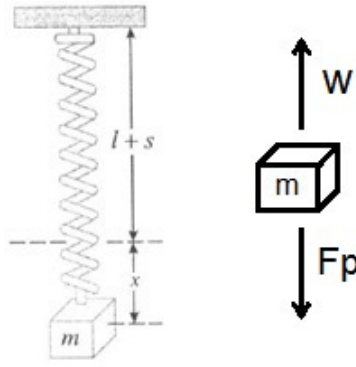


Figura C.2: Cujo F_{mola} é a Força restauradora do sistema e F_p a força peso. Figura adaptada de (ZILL; CULLEN, 2001, p. 227).

Somando as forças presentes na figura C.2 e considerando que a massa irá descer, temos a equação C.6.

$$F = F_p + F_{mola} \quad (C.6)$$

como a massa m foi deslocada uma quantidade x (Fig C.1(c)) para baixo a partir de s e sendo $F_p =$ força peso, temos que:

$$F = F_p - k(x + s). \quad (C.7)$$

Da equação C.4, C.7 e reorganizando algebricamente C.6 tem-se:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k(x + s) + mg, \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx + (mg - ks). \end{aligned}$$

Perceba que $(mg - ks) = 0$, pois é a posição de equilíbrio, logo:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

Assim:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad (C.8)$$

dividindo toda equação C.8 por m , temos:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (C.9)$$

A frequência angular ω de um movimento harmônico simples está relacionada à constante elástica k e a uma massa m presa no bloco, sendo representada pela equação:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (C.10)$$

Substituindo equação C.10 em C.9, obtêm-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0, \quad (\text{C.11})$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária, como comentado anteriormente. Equações diferenciais do tipo $\frac{dx}{dt} + ax = 0$, em que a é uma constante, possuem solução exponencial $x = c_1e^{-at}$ em $(-\infty, \infty)$ (ZILL; CULLEN, 2001, p. 173). Portanto, vamos supor que $x = e^{mt}$ seja uma solução para a equação C.11.

$$m^2e^{mt} + \omega^2e^{mt} = 0.$$

como e^{mt} não se anula para valores reais de t , isto implica que:

$$m^2 + \omega^2 = 0. \quad (\text{C.12})$$

Resolvendo C.12, temos dois valores para m :

$$m_1 = i\omega \text{ e } m_2 = -i\omega,$$

que são raízes complexas e distintas, como foi suposto que e^{mt} era uma solução, temos como conjunto de soluções:

$$\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}. \quad (\text{C.13})$$

Esses termos de C.13 podem ser expressos através da identidade de Euler⁹:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta). \quad (\text{C.14})$$

Em que θ é qualquer número real. Logo, possui a equação solução C.15.

$$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\text{sen}(\omega t), \quad (\text{C.15})$$

que é a solução deste problema proposto e quando estabelecidos c_1 e c_2 de maneiras determinadas o resultado pode ser as equações soluções C.16 ou C.17. Estas equações são semelhantes as citadas no capítulo 3. Portanto, a partir do modelo de um movimento harmônico, chegamos a um modelo para um pêndulo simples.

$$x(t) = A\text{sen}(\omega t + \phi). \quad (\text{C.16})$$

ou

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi). \quad (\text{C.17})$$

em que A é a amplitude, ω a frequência angular e ϕ o ângulo de fase.

⁹Uma explicação sobre a identidade de Euler esta presente em Zill e Cullen (2001, p. 174-175), com o auxílio desta identidade que conseguimos desenvolver os passos abaixo

C.2 Movimento harmônico amortecido

Quando provado matematicamente a equação C.16 do movimento harmônico simples, consideramos em condições ideais, sem dissipação de energia. Considerando agora uma força de amortecimento qualquer (figura C.3).

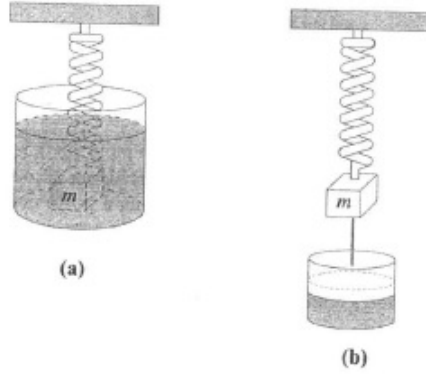


Figura C.3: Representando um sistema oscilante retirado de Zill e Cullen (2001, p. 236), com uma força dissipativa, que chamaremos F_d .

Como comentado no capítulo 3 a força dissipativa ou força de arrasto será proporcional a velocidade. Assim, $F_{arrasto} = -cv$, em quem o sinal negativo significa que esta força atuará contrária ao movimento. A velocidade é a derivada da posição, logo, $v = \frac{dx}{dt}$ e c é a constante de proporcionalidade, esta constante é mais especificada em Arnold et al. (2011, p. 4311-4).

Portanto, sem outras forças agindo sobre o sistema segue novamente de acordo com a segunda lei de Newton:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -k(x + s) + mg - cv, \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -k(x + s) + mg - c \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + c \frac{dx}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{C.18}$$

Dividindo toda equação C.18 por m , teremos a equação do movimento harmônico amortecido:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} = 0. \tag{C.19}$$

Na literatura, encontramos formas de utilizar manipulações algébricas para tornar as análises qualitativas mais fáceis, em Zill e Cullen (2001, p. 237) nomeia - se:

$$2\lambda = \frac{c}{m} \text{ e } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Assim, a equação C.19 fica da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0, \quad (\text{C.20})$$

Da seção anterior, vamos supor que $x = e^{mt}$ como solução temos:

$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0,$$

que é uma equação do segundo grau, com soluções:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \text{ e } m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

O termo $\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ é que irá definir o comportamento das possíveis soluções, o mesmo pode ser definido em três casos.

Caso 1: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. Quando isto ocorre, diz-se que o sistema é amortecido, pois o coeficiente de amortecimento b é muito grande comparado com a constante de elasticidade k . Assim, esta equação possui duas raízes reais e sua solução geral pode ser dada na forma:

$$x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}. \quad (\text{C.21})$$

Caso 2: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$. Neste caso o decaimento é um pouco mais lento e não possui oscilações, sendo denominado como um sistema criticamente amortecido. Sua solução geral tem a forma:

$$x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2te^{m_2t}. \quad (\text{C.22})$$

Caso 3: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. Temos agora um caso em que acontece oscilações, pois o coeficiente de amortecimento é menor em relação a constante elástica e as raízes desta equação serão complexas. Este sistema recebe o nome de subamortecido. sua solução geral, utilizando a identidade de Euler citada no capítulo 3 é dada na forma:

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1\cos(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t) + c_2\text{sen}(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t)). \quad (\text{C.23})$$

Se considerarmos $c_1 = A\cos\phi$ e $c_2 = A\text{sen}\phi$, chegamos em uma solução C.24, parecida com a equação solução 3.12, citada no capítulo 3. Reforçando que a partir do modelo de um movimento harmônico, mas agora amortecido, podemos ter outros modelos, como o pêndulo amortecido, por exemplo.

$$x(t) = A\cos(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t - \phi)e^{-\lambda t}, \quad (\text{C.24})$$

em que A é a amplitude, $\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ a frequência angular e ϕ o ângulo de fase.

Bibliografia

- ANDRADE, D.; CAMPOS, M. de. Análise do processo cognitivo na construção das figuras de lissajous. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, p. 587–591, 2005.
- ARNOLD, F. J. et al. Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, p. 4311–4311–7, 2011.
- BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática & implicações no ensino aprendizagem de matemática*. [S.l.]: Ed. Da Furb, 1999.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos., 2006.
- CENA, C. R.; PEREIRA, O. C. N.; PEREIRA, V. M. Uma abordagem teórica e experimental do oscilador harmônico em duas dimensões utilizando as curvas de lissajous. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 36, p. 2302–2302–9, 2014.
- MAOR, E. *Trigonometric Delights*. Princeton: Princeton University Press, 2002. 145-149 p.
- MARLETTA, A.; FERREIRA, J. V. B.; GUIMARAES, F. E. G. O pêndulo bifilar e as figuras de lissajous. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, p. 572–576, Dezembro 2000.
- MAW, W. H.; DREDGE, J. *Engineering*. London: Office for Advertisements and Publication, 1874. v. 17.
- PICKERING, E. C. On the experiment of lissajous. *Franklin Institute*, v. 57, p. 55–58, 1869.
- RIGGE, W. F. *Harmonic Curves*. Omaha, Nebraska: The Creighton University, 1926.
- ROSSING, T. D. Chladni's law for vibrating plates. *American Journal of Physics*, v. 50, 1982.
- SHIFFMAN, D. *Learning Processing*. Estados Unidos: Morgan Kaufmann, 2008.
- STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning., 2013. v. 1.
- WHITAKER, R. J. Harmonographs. i. pendulum design. *American Journal of Physics*, v. 69, p. 162–173, 2001a.
- WHITAKER, R. J. Harmonographs. ii. circular design. *American Journal of Physics*, v. 69, p. 174–183, 2001b.

WHITAKER, R. J. Types of two-dimensional pendulums and their uses in education. *Science & Education*, v. 13, p. 401–415, 2004.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 1.